3

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版



责任编辑　宋　涛　邱　蕾
封面设计　庞　婕　孙　佳

新版推荐

经典Б.П.吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解（共六册）

1　分析引论	定价：19.00元
2　单变量函数的微分学	定价：19.00元
3　不定积分　定积分	定价：20.00元
4　级数	定价：19.00元
5　多变量函数的微分法　带参数的积分	定价：22.00元
6　重积分和曲线积分	定价：19.00元
数学分析习题集精选精解	定价：39.00元
数学分析习题集——提示·解题思路·答案	定价：39.00元
高等数学习题精选精解	定价：39.80元


ISBN 978-7-5331-5898-9
9 787533 158989
定价：20.00 元

3

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 3/费定晖，周学圣编演.—4 版.—济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5898-9

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120115 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 3

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031 电话：(0536)2116806

开本：787 mm × 1092mm 1/16
印张：15
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5898-9
定价：20.00 元

第四版前言 DISIBANQIANYAN

本书自1979年出版发行以来，历经30多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书4462题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，“只看不练假把式”，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解，更不要查抄解答和答案，而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考，必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题，然后再查看书中是怎样解答的，比较自己的解答和书中解答的异同，从中找出差距，找出自己的问题所在，甚至找出书中解答的的错误和不足之处，进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能，任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力，责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血，在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订，面对如此庞大的图书，限于本人水平，书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录 MULU

第三章　不定积分

§1. 最简单的不定积分

1° **不定积分的概念**　若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义且连续，$F(x)$ 是它的原函数，即当 $a<x<b$ 时 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\quad a<x<b,$$

式中 C 为任意常数.

2° **不定积分的基本性质**：

(1) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int \mathrm{d}\Phi(x)=\Phi(x)+C$；

(3) $\int Af(x)\mathrm{d}x=A\int f(x)\mathrm{d}x$　(A 为常数，$A\neq 0$)；

(4) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3° **最简积分表**：

Ⅰ. $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$　$(n\neq -1)$；

Ⅱ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$　$(x\neq 0)$；

Ⅲ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\begin{cases}\arctan x+C,\\ -\mathrm{arccot}\,x+C;\end{cases}$

Ⅳ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$；

Ⅴ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

Ⅵ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C$；

Ⅶ. $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ $(a>0,a\neq 1)$；$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

Ⅷ. $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

Ⅸ. $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

Ⅹ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\cot x+C$；

ⅩⅠ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$；.

ⅩⅡ. $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}x+C$；

ⅩⅢ. $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}x+C$；

ⅩⅣ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x}=-\mathrm{coth}x+C$；

ⅩⅤ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th}x+C$.

4° **积分的基本方法**

(1) 引入新变量法　若

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

则

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,\quad \text{式中 } u=\varphi(x) \text{ 是连续可微函数.}$$

(2) 分项积分法　若

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 代入法　若 $f(x)$ 连续，令　$x=\varphi(t)$，　式中 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆连续，

则得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(4) 分部积分法　若 u 和 v 为 x 的可微函数，则　$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

利用最简积分表,求下列积分*:

【1628】 $\int (3-x^2)^3\,dx$.

解 $\int (3-x^2)^3\,dx=\int (27-27x^2+9x^4-x^6)\,dx=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$.

【1629】 $\int x^2(5-x)^4\,dx$.

解 $\int x^2(5-x)^4\,dx=\int (625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)\,dx=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C$.

【1630】 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$.

解 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx=\int (1-6x+11x^2-6x^3)\,dx=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C$.

【1631】 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

解 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx=\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$.

【1632】 $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$.

解 $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$.

【1633】 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

解 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

【1634】 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

解 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\int (x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})\,dx=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

【1635】 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

解 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx=\int (x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}})\,dx=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C$.

【1636】 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

提示 注意 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}$.

1634 题,1635 题,1637 题及 1638 题均可仿本题,将被积函数化成若干个幂函数的代数和,然后再利用分项积分法.

解 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int (x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})\,dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C$.

【1637】 $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\,dx$.

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中,凡出现的函数,无论是被积函数还是原函数,均默认是在有意义的定义域上进行的.例如,最简积分表Ⅰ中当 $n\leqslant -2$ 时,要求 $x\neq 0$;Ⅳ中要求 $|x|\neq 1$;Ⅴ中要求 $|x|<1$;以及Ⅵ中,当取负号时要求 $|x|>1$;等等,就未加声明.在题解中也有相当多的类似情况.因此,如无特别声明,在一般情况下,这些定义域是很容易被读者确定的,此处就不再予以一一指明.

《题解》作者注

解 $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx=\int(2-2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}})dx=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C.$

【1638】 $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int \frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$

【1639】 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x-\arctan x+C.$

【1640】 $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx.$

解 $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$

【1641】 $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

解 $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

【1642】 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

【1643】 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$

【1644】 $\int(2^x+3^x)^2dx.$

解 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx=\frac{4^x}{\ln4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C.$

【1645】 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

解 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx=-\frac{2}{\ln5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C.$

【1646】 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

解 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C.$

【1647】 $\int(1+\sin x+\cos x)dx.$

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx=x-\cos x+\sin x+C.$

【1648】 $\int\sqrt{1-\sin2x}\,dx.$

提示 注意 $\sqrt{1-\sin2x}=\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}=[\mathrm{sgn}(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x).$

解 $\int\sqrt{1-\sin2x}\,dx=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx=\int[\mathrm{sgn}(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\mathrm{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$

【1649】 $\int \cot^2 x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\cot^2 x=\csc^2 x-1$.

解 $\int \cot^2 x\mathrm{d}x=\int (\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=-\cot x-x+C$.

【1650】 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int (\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

【1651】 $\int (a\mathrm{sh}x+b\mathrm{ch}x)\mathrm{d}x$.

解 $\int (a\mathrm{sh}x+b\mathrm{ch}x)\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}x+b\mathrm{sh}x+C$.

【1652】 $\int \mathrm{th}^2 x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\mathrm{th}^2 x=1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.

解 $\int \mathrm{th}^2 x\mathrm{d}x=\int \left(1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)\mathrm{d}x=x-\mathrm{th}x+C$.

【1653】 $\int \mathrm{coth}^2 x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\mathrm{coth}^2 x=1+\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

解 $\int \mathrm{coth}^2 x\mathrm{d}x=\int \left(1+\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right)\mathrm{d}x=x-\mathrm{coth}x+C$.

【1654】 证明:若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则 $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0)$.

提示 由不定积分的定义,命题即获证.

证 由 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 得知 $F'(x)=f(x)$. 因而有 $F'(ax+b)=f(ax+b)$,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=F'(ax+b),$$

于是,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

所以,

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

求下列积分:

【1655】 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+a}$.

解 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+a}=\ln|x+a|+C$.

【1656】 $\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x$.

解 $\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{11}(2x-3)^{11}+C=\dfrac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$.

【1657】 $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C=-\dfrac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$.

【1658】 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}=-\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C.$

【1659】 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

解 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}+C.$

【1660】[+] * $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx=\int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$

【1661】 $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

解 $\int \frac{dx}{2+3x^2}=\int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

【1662】 $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

解 $\int \frac{dx}{2-3x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C.$

【1663】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

【1664】 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left|x\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|+C_1$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.$

【1665】 $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx.$

解 $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx=-\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+C.$

【1666】 $\int (\sin 5x-\sin 5\alpha)dx.$

解 $\int (\sin 5x-\sin 5\alpha)dx=-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5\alpha+C.$

【1667】 $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

---

* 题号右上角带"十"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明．中译本基本是按俄文第二版翻译的．俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正．

【1668】 $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}+C$.

【1669】 $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\cot\frac{x}{2}+C$.

【1670】 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

提示 注意$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$，并利用 1668 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$.

【1671】 $\int [\mathrm{sh}(2x+1)+\mathrm{ch}(2x-1)]dx$.

解 $\int [\mathrm{sh}(2x+1)+\mathrm{ch}(2x-1)]dx=\frac{1}{2}[\mathrm{ch}(2x+1)+\mathrm{sh}(2x-1)]+C$.

【1672】 $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}=2\,\mathrm{th}\frac{x}{2}+C$.

【1673】 $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2\frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2\frac{x}{2}}=-2\coth\frac{x}{2}+C$.

用适当地变换被积函数的方法求下列积分：

【1674】 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C$.

【1675】 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

提示 注意 $x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}(1+x^3)^{\frac{1}{3}}d(1+x^3)$.

解 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int (1+x^3)^{\frac{1}{3}}d(1+x^3)=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C$.

【1676】 $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}=-\frac{1}{4}\int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2}=-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|+C$.

【1677】 $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2(1+x^2)}+C.$

【1678】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}.$

提示 注意 $\frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2)}{2^2+(x^2)^2}.$

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{2^2+(x^2)^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C.$

【1679】 $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}.$

解 $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C.$

【1680】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}.$

提示 注意 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\cdot\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}+C.$

【1681】 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$

解 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\int \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C.$

【1682】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}.$

提示 注意 $\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\frac{\mathrm{d}x}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}=-\ln\left(\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C$

$=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.$

【1683】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

提示 仿 1682 题的解法.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$

【1684】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

提示 注意 $\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mathrm{sgn}x\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{sgn}x\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\mathrm{sgn}x\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{sgn}x\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

【1685】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x^2-1)=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C.$

【1686】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

解 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{24}\int(8x^3+27)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}(8x^3+27)=\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C.$

【1687】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$.

提示 分别就 $x>0$ 及 $x<-1$ 时求解，然后将这两个结果合并，其结果为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

解 由 $x(1+x)>0$ 知：$x>0$ 或 $x<-1$. 当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C;$$

当 $x<-1$ 时，$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int\frac{\mathrm{d}(-(1+x))}{\sqrt{(-x)(-(1+x))}}=-2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$

$$=-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C.$$

总之，得 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

【1688】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

解 由 $x(1-x)>0$ 知：$0<x<1$. 于是，得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

【1689】 $\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

【1690】 $\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{2+e^x}$.

解 $\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{2+e^x}=\int\frac{\mathrm{d}(2+e^x)}{2+e^x}=\ln(2+e^x)+C.$

【1691】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$.

提示 注意 $\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2}=\arctan(e^x)+C.$

【1692】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

提示 注意 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C.$

【1693】 $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx.$

解 $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\ln^2 x d(\ln x)=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$

【1694】 $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$

解 $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)}=\ln|\ln(\ln x)|+C.$

【1695】 $\int\sin^5 x\cos x dx.$

解 $\int\sin^5 x\cos x dx=\int\sin^5 x d(\sin x)=\frac{1}{6}\sin^6 x+C.$

【1696】 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.$

解 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx=-\int(\cos x)^{-\frac{3}{2}}d(\cos x)=\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C.$

【1697】 $\int\tan x dx.$

解 $\int\tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$

【1698】 $\int\cot x dx.$

解 $\int\cot x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$

【1699】 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx.$

解 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C$

$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C.$

【1700】$^+$ $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx.$

提示 分别就 $|a|=|b|\neq0$ 及 $|a|\neq|b|$ 两种情况求解.

解 当 $|a|=|b|\neq0$ 时,

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx=\frac{1}{|a|}\int\sin x\cos x dx=\frac{1}{2|a|}\sin^2 x+C;$$

当 $|a|\neq|b|$ 时,

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C.$$

【1701】 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\cot x}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\cot x}}=-\int(\cot x)^{-\frac{1}{4}}d(\cot x)=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}+C.$

【1702】 $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$

提示 注意 $\dfrac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}dx}{\tan^2 x+2}=\dfrac{d(\tan x)}{(\sqrt{2})^2+(\tan x)^2}$.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x+2}dx=\int\frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

【1703】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

提示 注意 $\dfrac{dx}{\sin x}=\dfrac{\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx}{\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}$.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}}dx=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

【1704】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$.

提示 注意 $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，并利用 1703 题的结果.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

【1705】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}$.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}=\int\frac{\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}dx=\int\frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$

【1706】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ch}x}$.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ch}x}=\int\frac{2dx}{e^x+e^{-x}}=2\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=2\arctan(e^x)+C.$

【1707】 $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}dx$.

提示 注意 $\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x=\dfrac{1}{2}(1+\operatorname{ch}^2 2x)$.

解 因为 $\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x=(\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x)^2-2\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x=\operatorname{ch}^2 2x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x=\dfrac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2}$,

所以，$\displaystyle\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}dx=\int\frac{\frac{1}{4}d(\operatorname{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x})+C_1$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}\right)+C.$$

【1708】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}=\int(\operatorname{th}x)^{-\frac{2}{3}}d(\operatorname{th}x)=3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}+C.$

【1709】 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$.

解 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$.

【1710】 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C$.

【1711】 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$.

解 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx = \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}} d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})] = \frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2}) + C$.

【1712】 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

提示 注意 $\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$.

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$.

【1713】 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

提示 注意 $\frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$.

解 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right) + C$.

【1714】+ $\int \frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$.

提示 注意 $\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4} = \frac{x^{14}dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} = -\frac{1}{5}(1+x^{-5})^{-4}d(1+x^{-5})$.

解 $\int \frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4} = \int \frac{x^{14}dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} = -\frac{1}{5}\int (1+x^{-5})^{-4}d(1+x^{-5}) = \frac{1}{15}(1+x^{-5})^{-3} + C_1$

$= \frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3} + C_1 = \frac{(x^5+1)^3 - 3x^{10} - 3x^5 - 1}{15(x^5+1)^3} + C_1 = -\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3} + C$.

【1715】 $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

提示 分别就 $n=-2$ 及 $n\neq -2$ 两种情况求解.

解 当 $n=-2$ 时，$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x| + C$；

当 $n\neq -2$ 时，$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx = \frac{2}{n+2}\int \frac{d(x^{\frac{n+2}{2}})}{\sqrt{1+(x^{\frac{n+2}{2}})^2}} = \frac{2}{n+2}\ln(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}}) + C$.

【1716】+ $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

提示 注意 $\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$.

解 $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$

【1717】 $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

提示 注意 $\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$.

解 $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$

【1718】 $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

提示 注意 $\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}$.

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C.$

【1719】 $\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$.

解 $\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}dx=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\int\frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$

【1720】 $\int\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 $\int\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int\frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$

用分项积分法计算下列积分：

【1721】 $\int x^2(2-3x^2)^2dx$.

解 $\int x^2(2-3x^2)^2dx=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7+C.$

【1722】 $\int\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int\frac{1+x}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)dx=-x-2\ln|1-x|+C.$

【1723】 $\int\frac{x^2}{1+x}dx$.

解 $\int\frac{x^2}{1+x}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|1+x|+C.$

【1724】 $\int\frac{x^3}{3+x}dx$.

解 $\int\frac{x^3}{3+x}dx=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{3+x}\right)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|3+x|+C.$

【1725】 $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$.

解 $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=x+\ln(1+x^2)+C.$

【1726】 $\int\frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx$.

解 $\int\frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx=\int\frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2}dx=\int\left(-1-\frac{4x}{2-x^2}+\frac{6}{2-x^2}\right)dx$

$=-x+2\ln|2-x^2|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+C.$

【1727】 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

提示 注意 $x^2=[(x-1)+1]^2$.

解 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}dx=\int[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]dx$

$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$

【1728】 $\int\frac{x^5}{x+1}dx$.

解 $\int\frac{x^5}{x+1}dx=\int\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|1+x|+C.$

【1729】 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\int\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx=\frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}]+C.$

【1730】 $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$.

提示 注意 $x=-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$.

解 $\int x\sqrt{2-5x}\,dx=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right](2-5x)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C.$

【1731】 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

解 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}dx=-\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{\frac{2}{3}}-(1-3x)^{-\frac{1}{3}}]dx$

$=\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$

【1732】 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)=\frac{1}{2}\int[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]d(1+x^2)$

$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$

【1733】 $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

提示 注意 $1=\frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)]$. 1734 题,1735 题及 1736 题均可仿本题的解法.

解 $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$

【1734】 $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 $\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

【1735】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}\right)dx = \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

【1736】 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3}\right)dx = \frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{5\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

【1737】 $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}\right)dx = \ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C.$

【1738】 $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

提示 注意$\frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$，并仿1733题的解法.

解 $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}\right)d(x^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C.$

【1739】 $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a\neq b)$.

提示 注意 $\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right)^2 = \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} &= \frac{1}{(a-b)^2}\int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\int \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]dx \\ &= -\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right) - \frac{2}{(a-b)^2}\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \\ &= -\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C.\end{aligned}$$

【1740】 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2}\right)dx = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b} - \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right) + C.$

【1741】 $\int \sin^2 x\,dx$.

解 $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

【1742】 $\int \cos^2 x\,dx$.

解 $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

【1743】 $\int \sin x\sin(x+\alpha)\,dx$.

解 $\int \sin x\sin(x+\alpha)\,dx = \frac{1}{2}\int [\cos\alpha - \cos(2x+\alpha)]dx = \frac{x}{2}\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin(2x+\alpha) + C.$

【1744】 $\int \sin 3x\sin 5x\,dx$.

解 $\int \sin 3x\sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

【1745】 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C.$

【1746】 $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+C.$

【1747】 $\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\sin^3 x\mathrm{d}x=\sin^2 x\sin x\mathrm{d}x=(\cos^2 x-1)\mathrm{d}(\cos x)$.

解 $\int \sin^3 x\mathrm{d}x=\int(\cos^2 x-1)\mathrm{d}(\cos x)=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

【1748】 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$.

提示 仿 1747 题的解法.

解 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

【1749】 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$.

解 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

【1750】 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int(3+4\cos 2x+\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

【1751】 $\int \cot^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \cot^2 x\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=-\cot x-x+C.$

【1752】 $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\tan^3 x=\tan x(\sec^2 x-1)$，并利用 1697 题的结果.

解 $\int \tan^3 x\mathrm{d}x=\int\tan x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int\tan x\mathrm{d}(\tan x)-\int\tan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C.$

注 其中第二个积分见 1697 题.

【1753】 $\int \sin^2 3x\sin^3 2x\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\sin^2 3x\sin^3 2x=\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{16}\sin 12x$.

解 因为 $\sin^2 3x\sin^3 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\cdot\frac{1}{4}(3\sin 2x-\sin 6x)$

$=\frac{1}{8}(3\sin 2x-3\cos 6x\sin 2x-\sin 6x+\sin 6x\cos 6x)$

$$=\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{16}\sin 12x,$$

所以，$$\int \sin^2 3x\sin^3 2x\mathrm{d}x=-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$

【1754】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

提示 注意 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x+\tan x+C.$$

【1755】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x}$.

提示 仿 1754 题的解法，并利用 1704 题的结果.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x}=\int \left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}+\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C.$$

其中第一个积分见 1704 题.

【1756】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$.

提示 仿 1754 题的解法，并利用 1703 题的结果.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}=\int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^3 x}+\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\tan x|+C.$$

其中第二个积分见 1703 题.

【1757】 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\int \left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)\mathrm{d}(\sin x)=\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

【1758】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}=\int \sec^2 x\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$$

【1759】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

提示 注意 $1=(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int \left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

【1760】 $\int \frac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \left(1+\frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}x=x+2\arctan(\mathrm{e}^x)+C.$$

【1761】 $\int \operatorname{sh}^2 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \operatorname{sh}^2 x\mathrm{d}x=\int \frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x-\frac{x}{2}+C.$$

【1762】 $\int \operatorname{ch}^2 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \operatorname{ch}^2 x\mathrm{d}x=\int \frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{x}{2}+C.$$

【1763】 $\int \operatorname{sh}x\operatorname{sh}2x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \operatorname{sh}x\operatorname{sh}2x\mathrm{d}x=2\int \operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}x\mathrm{d}x=2\int \operatorname{sh}^2 x\mathrm{d}(\operatorname{sh}x)=\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x+C.$$

【1764】 $\int \mathrm{ch}x\mathrm{ch}3x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{ch}x\mathrm{ch}3x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\mathrm{ch}4x+\mathrm{ch}2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{sh}4x+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+C.$

【1765】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}^2x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}^2x}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\right)\mathrm{d}x=-(\coth x+\mathrm{th}x)+C.$

用适当的代换,求下列积分:

【1766】 $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x$.

解 设 $1-x=t$,则 $x=1-t,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,

故得 $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x=-\int(1-t)^2t^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t=-\int(t^{\frac{1}{3}}-2t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{7}{3}})\mathrm{d}t=-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}+C$

$=-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C.$

【1767】 $\int x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d}x$.

解 设 $1-5x^2=t$,则 $x^2=\frac{1}{5}(1-t)$,从而,

$$x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{10}(1-t)\left(-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{50}(1-t)\mathrm{d}t,$$

故得 $\int x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d}x=-\frac{1}{50}\int(t^{10}-t^{11})\mathrm{d}t=-\frac{1}{550}t^{11}+\frac{1}{600}t^{12}+C=-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}+C.$

【1768】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$.

解 设 $2-x=t$,则 $x=2-t,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,

故得 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x=-\int t^{-\frac{1}{2}}(2-t)^2\mathrm{d}t=-\int(4t^{-\frac{1}{2}}-4t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}t=-8t^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$

$=-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C.$

【1769】 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 设 $1-x^2=t$,则 $x^2=1-t$,从而,

$$x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2)^2\mathrm{d}(x^2)=-\frac{1}{2}(1-t)^2\mathrm{d}t,$$

故得 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^2\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int(t^{-\frac{1}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}t=-t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$

$=-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C.$

【1770】 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$.

解 设 $2-5x^3=t$,则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$,从而,

$$x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\mathrm{d}(x^3)=-\frac{1}{75}(2-t)\mathrm{d}t,$$

故得 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{75}\int(2t^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{5}{3}})\mathrm{d}t=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+C$

$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$

【1771】+ $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$.

解　设 $\sin x=t$,则 $\cos^5 x dx=(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)=(1-t^2)^2 dt$,

故得　$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx=\int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}}dt=\int (t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}})dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C$

$=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$.

【1772】 $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

提示　令 $\cos^2 x=t$.

解　设 $\cos^2 x=t$,则 $\sin x\cos x dx=-\frac{1}{2}dt$,

故得　$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t}dt=-\frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln(1+t)+C$

$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C$.

【1773】 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

提示　令 $\tan x=t$.

解　设 $\tan x=t$,则 $\frac{1}{\cos^4 x}dx=(1+t^2)dt$,

故得　$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int (t^4+t^2)dt=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$.

【1774】 $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解　设 $1+\ln x=t$,则 $\frac{\ln x dx}{x}=(1+\ln x-1)d(1+\ln x)=(t-1)dt$,

故得　$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int t^{-\frac{1}{2}}(t-1)dt=\int (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$.

【1775】 $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

提示　令 $e^{\frac{x}{2}}=t$.

解　设 $e^{\frac{x}{2}}=t$,则 $e^x=t^2$, $dx=\frac{2dt}{t}$,

故得　$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}=2\int \frac{dt}{t^2(1+t)}=2\int \left(\frac{1-t}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{2}{t}-2\ln t+2\ln(1+t)+C$

$=-2e^{-\frac{x}{2}}-x+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})+C$.

【1776】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

解　设 $\sqrt{1+e^x}=t$,则 $x=\ln(t^2-1)$, $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$,

故得　$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int \frac{dt}{t^2-1}=\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C=x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C$.

【1777】 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

提示　令 $\arctan\sqrt{x}=t$.

解　设 $\arctan\sqrt{x}=t$,则 $dt=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$,

故得 $$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}=2\int t\,dt=t^2+C=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

运用三角函数的代换 $x=a\sin t$, $x=a\tan t$, $x=a\sin^2 t$ 等，求下列积分（参数为正的）：

【1778】 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 由于被积函数的存在域为 $-1<x<1$，因此，可设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 从而，

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\cos^3 t,\quad dx=\cos t\,dt.$$

代入得 $$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\tan t+C=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

【1779】 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

解题思路 注意被积函数的存在域为 $x>\sqrt{2}$ 及 $x<-\sqrt{2}$.

(1) 当 $x>\sqrt{2}$ 时，可设 $x=\sqrt{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$ 时，仍设 $x=\sqrt{2}\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$.

解 被积函数的存在域为 $x>\sqrt{2}$ 及 $x<-\sqrt{2}$，分别考虑.

(1) 当 $x>\sqrt{2}$ 时，可设 $x=\sqrt{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$. 从而，

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{2\sec^2 t}{\sqrt{2}\tan t},\qquad dx=\sqrt{2}\sec t\tan t\,dt.$$

代入得 $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}=2\int\sec^3 t\,dt=2\int\frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2 d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}+\int\frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$$

$$=\tan t\sec t+\ln(\sec t+\tan t)+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$$

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$ 时，仍设 $x=\sqrt{2}\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$. 其余步骤与上相同，注意到，此时 $\sec t+\tan t<0$，因此，在对数符号里要加绝对值，即结果为 $$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

总之，当 $|x|>\sqrt{2}$ 时， $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

【1780】 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 被积函数的存在域为 $-a\leqslant x\leqslant a$，因此，可设 $x=a\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. 从而，

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt.$$

代入得 $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2 dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)^{*)}+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

*) 利用 1742 题的结果.

【1781】 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 被积函数的存在域为 $-\infty<x<+\infty$，因此，可设 $x=a\tan t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 从而，

$$(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3 t,\quad dx=a\sec^2 t dt.$$

代入得 $$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

【1782】 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $-a\leqslant x<a$. 设 $x=a\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 求出结果的存在域为 $-a<x<a$. 可以证明:此结果在端点 $x=-a$ 处也成立. 即原函数在点 $x=-a$ 的(右)导数等于被积函数在点 $x=-a$ 之值.

解 被积函数的存在域为 $-a\leqslant x<a$,因此,可设 $x=a\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. 从而,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t},\quad dx=a\cos t dt.$$

代入得 $$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=a\int(1+\sin t)dt=a(t-\cos t)+C=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(-a<x<a).$$

注意,上式在端点 $x=-a$ 也成立. 即函数 $F(x)=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ 在点 $x=-a$ 的(右)导数等于被积函数 $f(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 在点 $x=-a$ 之值. 事实上,由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $-a\leqslant x<a$ 连续,且 $F'(x)=f(x)$ 在 $-a<x<a$ 成立. 故由中值定理知,当 $-a<x<a$ 时,有

$$\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=F'(\xi)=f(\xi),\quad -a<\xi<x.$$

由此可知,(右)导数 $$F'(-a)=\lim_{x\to-a+0}\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=\lim_{\xi\to-a+0}f(\xi)=f(-a).$$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论,从略.

【1783】 $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $0\leqslant x<2a$,设 $x=2a\sin^2 t$,并限制 $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$. 利用 1749 题的结果.

解 被积函数的存在域为 $0\leqslant x<2a$,因此,可设 $x=2a\sin^2 t$,并限制 $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$. 从而,

$$x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t},\quad dx=4a\sin t\cos t dt.$$

代入得 $$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=8a^2\int\sin^4 t dt=8a^2\left(\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)^{*)}+C.$$

注意到 $$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{1-\frac{x}{2a}}=\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}$$

及 $$\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)=\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)},$$

最后得 $$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-2a^2\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{1}{4}a^2\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}+C$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

*) 利用 1749 题的结果.

【1784】 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

解题思路 不妨设 $a<b$. 注意被积函数的存在域为 $a<x<b$,设 $x-a=(b-a)\sin^2 t$,并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$.

解 不妨设 $a<b$. 被积函数的存在域为 $a<x<b$,因此,可设 $x-a=(b-a)\sin^2 t$,并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$. 从而,

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t\cos t,\quad dx=2(b-a)\sin t\cos t dt.$$

代人得
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int dt=2t+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

【1785】 $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx.$

解题思路 与 1784 题相同,作同一代换,并注意到

$$\sin4t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)=4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\left(1-2\frac{x-a}{b-a}\right)=-4\frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

解 与 1784 题相同,作同一代换,并注意到

$$\sin4t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)=4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\left(1-2\frac{x-a}{b-a}\right)=-4\frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x-a)(b-x)},$$

即得
$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx=2(b-a)^2\int\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2t dt=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos4t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin4t\right)+C=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

用双曲函数代换 $x=a\operatorname{sh}t$, $x=a\operatorname{ch}t$ 等,求下列积分(参数为正的):

【1786】 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

提示 设 $x=a\operatorname{sh}t$,并利用 1762 题的结果.

解 被积函数的存在域为 $-\infty<x<+\infty$,因此,可设 $x=a\operatorname{sh}t$. 从而,

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\operatorname{ch}t,\quad dx=a\operatorname{ch}t dt.$$

代人得
$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\operatorname{ch}^2 t dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t\right)^{*)}+C_1.$$

注意到 $x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t)=ae^t$,即 $t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ 及 $\operatorname{sh}2t=2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}$,最后得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

*) 利用 1762 题的结果.

【1787】 $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$

提示 设 $x=a\operatorname{sh}t$,并利用 1761 题的结果.

解 与 1786 题相同,设 $x=a\operatorname{sh}t$,则 $\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}t}$, $dx=a\operatorname{ch}t dt$.

代人得
$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\int\operatorname{sh}^2 t dt=a^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t-\frac{t}{2}\right)^{*)}+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

*) 利用 1761 题的结果.

【1788】+ $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $x\geqslant a$ 及 $x<-a$.

(1)当 $x>a$ 时,设 $x=a\operatorname{ch}t$,并限制 $t>0$. (2)当 $x<-a$ 时,设 $x=-a\operatorname{ch}t$,并限制 $t>0$.

解 被积函数的存在域为 $x\geqslant a$ 及 $x<-a$.

(1) 当 $x>a$ 时,可设 $x=a\operatorname{ch}t$,并限制 $t>0$. 从而,

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{sh}t},\quad dx=a\operatorname{sh}t dt.$$

代入得 $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=a\int(\mathrm{ch}t-1)\mathrm{d}t=a\mathrm{sh}t-at+C_1=a\sqrt{\mathrm{ch}^2t-1}-at+C_1$

$$=a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\frac{x}{a}\right)+C_1=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}+x)+C_2$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})+C.$$

(2) 当 $x<-a$ 时，可设 $x=-a\mathrm{ch}t$，并限制 $t>0$. 从而，$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\mathrm{ch}t+1}{\mathrm{sh}t}$， $\mathrm{d}x=-a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t$.

代入得 $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=-a\int(\mathrm{ch}t+1)\mathrm{d}t=-a\mathrm{sh}t-at+C_1$

$$=-a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{x}{a}\right)+C_1=-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x)+C_2$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})+C.$$

总之，当 $|x|>a$ 时，

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=\mathrm{sgn}x\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|})+C.$$

【1789】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

解 不妨设 $a<b$. 注意被积函数的存在域为 $x>-a$ 及 $x<-b$.

(1) 当 $x>-a$ 时，设 $x+a=(b-a)\mathrm{sh}^2t$，并限制 $t>0$.

(2) 当 $x<-b$ 时，设 $x+b=(a-b)\mathrm{sh}^2t$，并限制 $t>0$.

解 不妨设 $a<b$. 被积函数的存在域为 $x>-a$ 及 $x<-b$.

(1) 当 $x>-a$ 时，可设 $x+a=(b-a)\mathrm{sh}^2t$，并限制 $t>0$.

从而， $\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t$， $\mathrm{d}x=2(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$.

代入得 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\int\mathrm{d}t=2t+C_1.$$

注意到 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{b-a}(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=\sqrt{b-a}\,\mathrm{e}^t$，就有 $t=\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$，最后得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C.$$

(2) 当 $x<-b$ 时，可设 $x+b=(a-b)\mathrm{sh}^2t$，并限制 $t>0$.

从而， $\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t$， $\mathrm{d}x=-(b-a)2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$.

代入得 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=-2\int\mathrm{d}t=-2t+C_1=-2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})+C.$$

总之， $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\begin{cases}2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}), & x+a>0\text{ 及 }x+b>0,\\ -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}), & x+a<0\text{ 及 }x+b<0.\end{cases}$$

【1790】 $\int\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$.

提示 仿 1789 题的解法.

解 与 1789 题相同，作同一代换，只是在求积分的过程中变动个别地方. 今以 $x>-a$ 时为例，解法如下：

$$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x=2(b-a)^2\int\mathrm{sh}^2t\mathrm{ch}^2t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(b-a)^2\int\mathrm{sh}^22t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(b-a)^2\int(\mathrm{ch}4t-1)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}4t-t\right)+C_1=\frac{1}{4}(b-a)^2[\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t(1+2\mathrm{sh}^2t)-t]+C_1$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}}\left(1+2\cdot\frac{x+a}{b-a}\right)-\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})\right]+C$$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C.$$

当 $x<-b$ 时，与 1789 题类似，只是将结果改成

$$\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C,$$

此处不再写出解法步骤.

总之，

$$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\dfrac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C, & x+a>0\text{ 及 }x+b>0,\\ \dfrac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\dfrac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C, & x+a<0\text{ 及 }x+b<0.\end{cases}$$

用分部积分法，求下列积分：

【1791】 $\int\ln x\mathrm{d}x.$

解 $\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C.$

【1792】 $\int x^n\ln x\mathrm{d}x\quad(n\neq-1).$

解 $\int x^n\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int\ln x\mathrm{d}(x^{n+1})=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$

【1793】 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=-\int\ln^2x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln^2x+\int\frac{1}{x}2\ln x\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln^2x-2\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$=-\frac{1}{x}\ln^2x-\frac{2}{x}\ln x+2\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+2)+C.$

【1794】 $\int\sqrt{x}\ln^2x\mathrm{d}x$

解 $\int\sqrt{x}\ln^2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\ln^2x\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\ln x\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2x-\frac{8}{9}\int\ln x\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C.$

【1795】 $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

解 $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=-\mathrm{e}^{-x}(x+1)+C.$

【1796】 $\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

解 $\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})$

$=-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C.$

【1797】 $\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

提示 注意 $x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2d(e^{-x^2})$.

解 $\int x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-x^2})=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(x^2)=-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C.$

【1798】 $\int x\cos x dx$.

解 $\int x\cos x dx=\int xd(\sin x)=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x+C.$

【1799】 $\int x^2\sin 2x dx$.

解 $\int x^2\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\int x^2d(\cos 2x)=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int xd(\sin 2x)$

$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x dx=-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C.$

【1800】 $\int x\operatorname{sh}x dx$.

解 $\int x\operatorname{sh}x dx=\int xd(\operatorname{ch}x)=x\operatorname{ch}x-\int \operatorname{ch}x dx=x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C.$

【1801】 $\int x^3\operatorname{ch}3x dx$.

解 $\int x^3\operatorname{ch}3x dx=\frac{1}{3}\int x^3d(\operatorname{sh}3x)=\frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x-\int x^2\operatorname{sh}3x dx=\frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x-\frac{1}{3}\int x^2d(\operatorname{ch}3x)$

$=\frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x-\frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x+\frac{2}{3}\int x\operatorname{ch}3x dx=\frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x-\frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x+\frac{2}{9}\int xd(\operatorname{sh}3x)$

$=\frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x-\frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x+\frac{2}{9}x\operatorname{sh}3x-\frac{2}{9}\int \operatorname{sh}3x dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x+C.$

【1802】 $\int \arctan x dx$.

解 $\int \arctan x dx=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

【1803】 $\int \arcsin x dx$.

解 $\int \arcsin x dx=x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

【1804】 $\int x\arctan x dx$.

解 $\int x\arctan x dx=\frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1+x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+C.$

【1805】 $\int x^2\arccos x dx$.

解 $\int x^2\arccos x dx=\frac{1}{3}\int \arccos x d(x^3)=\frac{1}{3}x^3\arccos x+\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}\right)d(1-x^2)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}+C.$

【1806】 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

提示 使用分部积分法后，令 $x=\sin t$，并利用 1703 题的结果.

解 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

对最后一个积分作代换 $x=\sin t$，得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|^{*)} + C = \ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C,$$

最后得 $$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

*) 利用 1703 题的结果.

【1807】 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$

【1808】 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2) = \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$

$= x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C.$

【1809】 $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

解 $\int \arctan\sqrt{x}dx = x\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx = x\arctan\sqrt{x} - \int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)d(\sqrt{x})$

$= (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

【1810】 $\int \sin x\ln(\tan x)dx$.

解 $\int \sin x\ln(\tan x)dx = -\int \ln(\tan x)d(\cos x) = -\cos x\ln(\tan x) + \int \cos x\cot x\sec^2 x dx$

$= -\cos x\ln(\tan x) + \int \frac{dx}{\sin x} = -\cos x\ln(\tan x) + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

求下列积分：

【1811】 $\int x^5 e^{x^3}dx$.

解 $\int x^5 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int x^3 d(e^{x^3}) = \frac{1}{3}x^3e^{x^3} - \frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3) = \frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3} + C.$

【1812】 $\int (\arcsin x)^2 dx$.

解 $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2})$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$

【1813】 $\int x(\arctan x)^2 dx$.

解 $\int x(\arctan x)^2 dx = \frac{1}{2}\int (\arctan x)^2 d(x^2) = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \arctan x dx + \int \arctan x d(\arctan x)$

$$=\frac{x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\arctan x)^2=\frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

【1814】 $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x.$

解 $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\ln\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}(x^3)=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\left(-x+\frac{x}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+C.$$

【1815】 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\sqrt{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$$

【1816】 $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

提示 注意$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(1+x^2)=-\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$

解 $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(1+x^2)=-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1817】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}.$

解 当$a=0$时,因为 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4}=-\frac{1}{3x^3}+C;$$

当$a\neq0$时,因为 $$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x,$$

故得 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)+C.$$

【1818】 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x.$

提示 使用分部积分法后,并注意$x^2=a^2-(a^2-x^2)$.

解 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{|a|}-\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

于是,得 $$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\quad(a\neq0).$$

【1819】 $\int\sqrt{x^2+a}\mathrm{d}x.$

解 $\int\sqrt{x^2+a}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\mathrm{d}x+a\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}.$

于是,得 $$\int\sqrt{x^2+a}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

【1820】 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x.$

解题思路 首先,有$x^2\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2+x^2)=\frac{1}{3}x\mathrm{d}[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}]$,使用分部积分

法. 其次，将积分 $\int(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}dx$ 分成 $a^2\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ 与 $\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ 两项，并利用 1786 题的结果.

解 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\int x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2+x^2)=\frac{1}{3}\int xd[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}]$

$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}dx-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx.$

于是，得 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}dx\right]$

$=\frac{1}{4}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]^{*)}+C$

$=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

*) 利用 1786 题的结果.

【1821】 $\int x\sin^2 xdx.$

解 $\int x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos2x)dx=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{2}\int x\cos2xdx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int xd(\sin2x)$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin2x+\frac{1}{4}\int\sin2xdx=\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4}\sin2x-\frac{1}{8}\cos2x+C.$

【1822】 $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

提示 令 $\sqrt{x}=t$ 后，再使用分部积分法，最后将 t 换成 $\sqrt{x}$.

解 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^tdt=2\int td(e^t)=2te^t-2\int e^tdt=2te^t-2e^t+C=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$

【1823】 $\int x\sin\sqrt{x}dx.$

提示 令 $\sqrt{x}=t$ 后，多次使用分部积分法，最后将 t 换成 $\sqrt{x}$.

解 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$\int x\sin\sqrt{x}dx=2\int t^3\sin tdt=-2\int t^3d(\cos t)=-2t^3\cos t+6\int t^2\cos tdt=-2t^3\cos t+6\int t^2d(\sin t)$

$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\int t\sin tdt=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12\int td(\cos t)$

$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12t\cos t-12\int\cos tdt=-2(t^2-6)t\cos t+6(t^2-2)\sin t+C$

$=2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C.$

【1824】 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 记 $I_1=\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,\ I_2=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

则

$$\begin{cases}I_1=\int e^{\arctan x}d(-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}})=-\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+I_2, & ①\\ I_1=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x})=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-I_2. & ②\end{cases}$$

由①+②即得 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C.$

【1825】 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 同 1824 题②－①，即得 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C.$

【1826】 $\int \sin(\ln x)dx.$

解 $\int \sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int \sin(\ln x)dx.$

于是，得 $\int \sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$

【1827】 $\int \cos(\ln x)dx.$

提示 利用 1826 题的结果.

解 $\int \cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int \sin(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]^{*)}+C$

$=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C.$

*) 利用 1826 题的结果.

【1828】 $\int e^{ax}\cos bx dx.$

解 如果 a,b 同时为零，积分显然为 $x+C$；若 $a=0,b\neq 0$，积分显然为 $\frac{1}{b}\sin bx+C$；以下设 $a\neq 0$.

$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}\int \cos bx d(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin x dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int \sin bx d(e^{ax})$

$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx dx.$

于是，得 $\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right]+C=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C.$

【1829】 $\int e^{ax}\sin bx dx.$

解 若 $a=b=0$，则积分为 $x+C$；若 $a=0,b\neq 0$，则积分为 $-\frac{1}{b}\cos bx+C$；以下设 $a\neq 0$.

$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{a}\int \sin bx d(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int \cos bx d(e^{ax})$

$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx.$

于是，得 $\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$

【1830】 $\int e^{2x}\sin^2 x dx.$

提示 注意 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，并利用 1828 题的结果.

解 $\int e^{2x}\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx$

$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\cos 2x+2\sin 2x}{8}e^{2x}\right)^{*)}+C=\frac{1}{8}e^{2x}(2-\cos 2x-\sin 2x)+C.$

*）利用 1828 题的结果.

【1831】 $\int (e^x-\cos x)^2 dx$.

解 $\int (e^x-\cos x)^2 dx=\int (e^{2x}-2e^x\cos x+\cos^2 x)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-2\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2}^{*)}+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)^{**)}+C$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

*）利用 1828 题的结果.

**）利用 1742 题的结果.

【1832】 $\int \frac{\operatorname{arccot}(e^x)}{e^x}dx$.

提示 利用 1759 题的结果.

解 $\int \frac{\operatorname{arccot}(e^x)}{e^x}dx=-\int \operatorname{arccot}(e^x)d(e^{-x})=-e^{-x}\operatorname{arccot}(e^x)-\int \frac{dx}{1+e^{2x}}$

$=-e^{-x}\operatorname{arccot}(e^x)-\frac{1}{2}[2x-\ln(1+e^{2x})]^{*)}+C=-e^{-x}\operatorname{arccot}(e^x)-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$

*）利用 1759 题的结果.

【1833】 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

提示 $\frac{1}{\sin^2 x}dx=-d(\cot x)$，使用分部积分法后，并利用 1751 题的结果.

解 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx=-\int \ln(\sin x)d(\cot x)=-\cot x\ln(\sin x)+\int \cot^2 x dx$

$=-\cot x\ln(\sin x)+(-\cot x-x)^{*)}+C=-[x+\cot x\ln(e\sin x)]+C.$

*）利用 1649 题或 1751 题的结果.

【1834】 $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

提示 仿 1833 题，并利用 1697 题的结果.

解 $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}=\int x d(\tan x)=x\tan x-\int \tan x dx=x\tan x+\ln|\cos x|^{*)}+C.$

*）利用 1697 题的结果.

【1835】 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=-\int xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{x}{1+x}e^x+\int \frac{1}{1+x}e^x(x+1)dx=-\frac{x}{1+x}e^x+e^x+C$

$=\frac{e^x}{1+x}+C.$

下列积分的求法需要把二次三项式化成标准形式，并利用下列公式：

Ⅰ. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a\neq 0)$；

Ⅱ. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\quad(a\neq 0)$；

Ⅲ. $\int \frac{x dx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C$；

Ⅳ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

Ⅴ. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$；

Ⅵ. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C$；

Ⅵ. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$;

Ⅶ. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

求下列积分:

【1836】+ $\int\frac{dx}{a+bx^2}\quad(ab\neq0).$

解 当 $ab>0$ 时,

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\operatorname{sgn}a\,\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2+(\sqrt{|b|}x)^2}=\operatorname{sgn}a\,\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C;$$

当 $ab<0$ 时, $\int\frac{dx}{a+bx^2}=\operatorname{sgn}a\int\frac{dx}{|a|-|b|x^2}=\operatorname{sgn}a\,\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2-(\sqrt{|b|}x)^2}$

$$=\frac{\operatorname{sgn}a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+C.$$

【1837】 $\int\frac{dx}{x^2-x+2}.$

解 $\int\frac{dx}{x^2-x+2}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$

【1838】 $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}.$

解 $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\frac{2}{3}+\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}-\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right|+C_1=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C.$$

【1839】 $\int\frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}.$

解 $\int\frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|+C.$

【1840】 $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$

解 $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【1841】 $\int\frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

解 $\int\frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int\frac{x-\cos\alpha+\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha\right]}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}+\cos\alpha\int\frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\cot\alpha\cdot\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+C\quad(\alpha\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

【1842】 $\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2}$.

解 $$\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2}=\frac{1}{2}\int \frac{x^2 d(x^2)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

【1843】 $\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}$.

提示 如果本题不化成标准形式来做，则可有更简单的做法，只需注意

$$\frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3 d(x^3)}{(x^3-2)(x^3+1)}=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)d(x^3),$$

即易获解.

解 $$\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int \frac{x^3 d(x^3)}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\int \frac{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}-\frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}\right|+C=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}+C.$$

如果本题不化成标准形式来作，则有更简单的作法.事实上，

$$\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int \frac{x^3 d(x^3)}{(x^3-2)(x^3+1)}=\frac{1}{9}\int \left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)d(x^3)$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}+C.$$

【1844】 $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

解 $$\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\int \frac{d(\tan x)}{3\tan^2 x-8\tan x+5}=\frac{1}{3}\int \frac{d\left(\tan x-\frac{4}{3}\right)}{\left(\tan x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}-\left(\tan x-\frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3}+\left(\tan x-\frac{4}{3}\right)}\right|+C_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C.$$

【1845】 $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$.

解 $$\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx}{2\tan\frac{x}{2}+4+\sec^2\frac{x}{2}}=2\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2+4}=\arctan\left[\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}\right]+C.$$

【1846】 $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$ $(b\neq 0)$.

解 当 $b>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}|+C;$$

当 $a>0$ 及 $b<0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\int \frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+C.$$

【1847】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$

【1848】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C.$$

注 本题即 1687 题，注意不同的解法及不同形式的结果.

【1849】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

解 $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right)+C.$$

【1850】 证明：若 $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$，

则当 $a>0$ 时， $\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C;$

当 $a<0$ 时， $\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$

证 当 $a>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C;$$

当 $a<0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C.$$

【1851】 $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解 $$\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}=\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{d\left[\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)+C.$$

【1852】 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

解 $$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

【1853】 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

解 $$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right)+C.$$

【1854】 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

解 $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d(x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|+C.$$

【1855】 $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx.$

解 $$\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

【1856】 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

解 当 $x>0$，设 $x=\frac{1}{t}$，$t>0$，则

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C_1=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C_2,$$

当 $x<0$，设 $x=-\frac{1}{t}$，$t>0$，显然有

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3=-\ln\left|\frac{-x-2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C_4,$$

总之，不论 x 为正或为负，均有

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

【1857】 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 作代换 $t=\frac{1}{x}$，则

$$x^2\sqrt{x^2+x-1}=\operatorname{sgn}t\,\frac{\sqrt{-t^2+t+1}}{t^3},\quad dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

于是，$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}=-(\operatorname{sgn}t)\int \frac{t}{\sqrt{-t^2+t-1}}dt=-(\operatorname{sgn}t)\left(-\frac{1}{2}\int\frac{d(-t^2+t+1)}{\sqrt{-t^2+t+1}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right)$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\left(-\sqrt{-t^2+t+1}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^{*)}+C=(\operatorname{sgn}x)\left[\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x|}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}\right)+C.$$

其存在域为 $\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}$.

*) 利用 1850 题的结果.

【1858】 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

提示 设 $y=x+1$，本题即转化为 1856 题的类型.

解 设 $y=x+1$，本题即转化为 1856 题的类型. 由于解法类似，且 $x+1$ 的符号对结果没有影响，故仅就 $x+1>0$ 列出解法的主要步骤如下：

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y}+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C.$$

【1859】 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

提示 设 $x-1=\frac{1}{t}$.

解 设 $x-1=\frac{1}{t}$，则 $(x-1)\sqrt{x^2-2}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，

代入得 $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{\operatorname{sgn}t\,dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=-\operatorname{sgn}t\arcsin\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)+C=\arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right)+C$$

$(|x|>\sqrt{2})$.

【1860】+ $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

提示 设 $x+2=\frac{1}{t}$.

解 设 $x+2=\frac{1}{t}$，则 $(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}=\frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2|t|}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，

代入得 $$\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}=-\int\frac{t\operatorname{sgn}t\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\left[\left(t+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\right]\operatorname{sgn}t\,dt}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sgn}t\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}t-t^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\operatorname{sgn}t\arcsin\left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}}\right)+C=\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}\right)+C.$$

其存在域为满足不等式 $x^2+2x-5>0$ 的一切 x 值，即 $|x+1|>\sqrt{6}$.

【1861】 $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

解 $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)+C.$

【1862】 $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

解 $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{7}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right)+C.$

【1863】 $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx$.

解 $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+1)^2-2}\,d(x^2+1)$

$=\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1})+C.$

【1864】 $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

解 由于 $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|+C_1$（可仿照 1856 题求得），

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2,$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_3,$$

所以，$\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

$=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{1+x-x^2}+C.$

其中存在域为满足不等式 $1+x-x^2>0$ 且 $x\neq0$ 的一切 x 值，即 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $x\neq0$.

【1865】 $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$.

提示 注意 $$\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx=\frac{\operatorname{sgn}x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx=\frac{\operatorname{sgn}x\,d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}.$$

解 $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx=\int\frac{\operatorname{sgn}x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx=\int\frac{\operatorname{sgn}x\,d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}=\operatorname{sgn}x\ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right)+C_1$

$=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C.$

§ 2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

【1866】 $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

解题思路 注意被积函数分解成部分分式$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，经通分后得恒等式 $2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2)$，令 $x=2$ 及 $x=-5$，求得 A、B.

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，通分后应有$2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2)$. 在这恒等式中，

令 $x=2^{*)}$，得 $7=7A$，$A=1$； 令 $x=-5$，得 $-7=-7B$，$B=1$.

于是，
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)dx=\ln|(x-2)(x+5)|+C.$$

*) 注意，这是一种习惯的说法. 实际上，不能直接令 $x=2$（因为上述恒等式是当 $x\neq 2$，$x\neq -5$ 时得出来的），而应令 $x\to 2$ 取极限，得 $7=7A$，以下类似情况都作此理解，不再一一说明.

【1867】 $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

解 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$，通分后应有 $x\equiv A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$. 在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $-1=2A$，$A=-\frac{1}{2}$； 令 $x=-2$，得 $-2=-B$，$B=2$；

令 $x=-3$，得 $-3=2C$，$C=-\frac{3}{2}$.

于是，
$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C.$$

【1868】 $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$.

解 $\frac{x^{10}}{x^2+x-2}=x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}$，

设 $\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$，通分后应有 $-341x+342\equiv A(x-1)+B(x+2)$. 在这恒等式中，

令 $x=-2$，得 $1024=-3A$，$A=-\frac{1024}{3}$； 令 $x=1$，得 $1=3B$，$B=\frac{1}{3}$.

于是，
$$\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx=\int\left[x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171-\frac{1024}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}\right]dx$$
$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|+C.$$

【1869】 $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

解 $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}$，

设$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，通分后应有 $5x^2-6x+1\equiv A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)$. 在这恒等式中，

令 $x=0$,得 $1=6A$, $A=\frac{1}{6}$; 令 $x=2$,得 $9=-2B$, $B=-\frac{9}{2}$; 令 $x=3$,得 $28=3C$, $C=\frac{28}{3}$.

于是, $$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]dx$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

【1870】 $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx.$

提示 可不用代入法,而用比较恒等式两端 x 的同次幂的系数,解方程组求得待定系数(当然,首先将被积函数化为真分式).

解 $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1+\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

设 $\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+4}$,通分后应有 $-(5x^2+4)\equiv(A_1x+B_1)(x^2+4)+(A_2x+B_2)(x^2+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂的系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A_1+A_2=0, \\ x^2 & B_1+B_2=-5, \\ x^1 & 4A_1+A_2=0, \\ x^0 & 4B_1+B_2=-4. \end{array}$$

由此,$A_1=0$, $B_1=\frac{1}{3}$, $A_2=0$, $B_2=-\frac{16}{3}$. 于是,

$$\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx=\int\left[1+\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{16}{3(x^2+4)}\right]dx=x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

【1871】 $\int\frac{x\,dx}{x^3-3x+2}.$

解 $\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$, 通分后应有 $x\equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$. 在这恒等式中,

令 $x=1$, 得 $1=3B$, $B=\frac{1}{3}$; 令 $x=-2$, 得 $-2=9C$, $C=-\frac{2}{9}$;

比较 x^2 的系数,得 $A+C=0$,从而,$A=\frac{2}{9}$. 于是,

$$\int\frac{x\,dx}{x^3-3x+2}=\int\left[\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x+2)}\right]dx=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

【1872】 $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

解 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$,通分后应有 $x^2+1\equiv A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$. 在这恒等式中,

令 $x=-1$, 得 $2=-2B$, $B=-1$; 令 $x=1$, 得 $2=4C$, $C=\frac{1}{2}$;

比较 x^2 的系数,得 $A+C=1$. 从而,$A=\frac{1}{2}$. 于是,

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}\right]dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

【1873】 $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx.$

解 $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2},$

通分后应有 $x^2\equiv A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2$. 在这恒等式中，

令 $x=1$，得 $B=1$；令 $x=2$，得 $D=4$；比较 x^3 及 x^2 的系数，得

$$A+C=0 \quad 及 \quad -5A+B-4C+D=1;$$

由此，$A=4$，$C=-4$. 于是，

$$\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+C=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+C.$$

【1874】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

提示 为了求得待定系数，可同时使用代入法及比较等式两端 x 的同次幂的系数，这样做，可减少确定待定系数的计算工作量.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}$，

通分后应有

$$1\equiv A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3+C(x+1)(x+3)^3+D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2.$$

在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $1=8A$，$A=\frac{1}{8}$； 令 $x=-2$，得 $1=-C$，$C=-1$； 令 $x=-3$，得 $1=-2F$，$F=-\frac{1}{2}$；

比较 x^5、x^4 及 x^3 的系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & A+B+D=0, \\ x^4 & 13A+12B+C+11D+E=0, \\ x^3 & 67A+56B+10C+47D+8E+F=0. \end{array}$$

由此，$B=2$，$D=-\frac{17}{8}$，$E=-\frac{5}{4}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\int\left[\frac{1}{8(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{17}{8(x+3)}-\frac{5}{4(x+3)^2}-\frac{1}{2(x+3)^3}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\ln|x+1|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-\frac{17}{8}\ln|x+3|+\frac{5}{4(x+3)}+\frac{1}{4(x+3)^2}+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+C.$$

【1875】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

解 $\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}$，

通分后应有 $1\equiv A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2$. 在这恒等式中，

令 $x=1$，得 $1=8B$，$B=\frac{1}{8}$； 令 $x=-1$，得 $1=4E$，$E=\frac{1}{4}$； 令 $x=0$，得 $-A+B+C+D+E=1$；

令 $x=2$，得 $27A+27B+9C+3D+E=1$； 令 $x=-2$，得 $3A-B+9C-9D+9E=1$；

由此，$A=-\frac{3}{16}$，$C=\frac{3}{16}$，$D=\frac{1}{4}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\int\left[-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^3}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{16}\ln|x-1|-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\ln|x+1|-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)^2}+C$$

$$=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+C.$$

【1876】 $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解 设 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$,通分后应有

$$x^2+5x+4\equiv(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x^1 & 4A+C=5, \\ x^0 & 4B+D=4. \end{array}$$

由此,$A=\frac{5}{3}$, $B=1$, $C=-\frac{5}{3}$, $D=0$. 于是,

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1}+\frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\arctan x+C.$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解,而使用其他技巧,也可有更简单的方法.事实上,

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x+5\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\arctan x+\frac{5}{6}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)\mathrm{d}(x^2)=\arctan x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.$$

【1877】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$,通分后应有 $1\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂的系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此,$A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$. 于是,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1878】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

提示 本题若用待定系数法,较麻烦一些.可将被积函数变形为 $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2+1}$ 后,即易获解.

解 由于 $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}$,

于是, $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\int\left[\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right]\mathrm{d}x=-\frac{1}{x-2}-\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{(x-2)^2+1}$

$$=-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)+C.$$

本题若用待定系数法,较麻烦一些,也可获得同样的结果,此处从略.

【1879】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

解 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$,通分后应有

$$x\equiv A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B-2C+D=0, \\ x^1 & 2B+C-2D=1, \\ x^0 & -2A+2B+D=0. \end{array}$$

由此 $A=\frac{1}{25}$，$B=\frac{1}{5}$，$C=-\frac{1}{25}$，$D=-\frac{8}{25}$. 于是，

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\int\left[\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}-\frac{x+8}{25(x^2+2x+2)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x-\frac{7}{25}\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2)-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C$$

$$=\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C.$$

【1880】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

解 设 $\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(1+x+x^2)+Bx(1+x+x^2)+x(x+1)(Cx+D).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+D=0, \\ x^0 & A=1. \end{array}$$

由此，$A=1$，$B=-1$，$C=0$，$D=-1$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

本题也可以不用待定系数法. 事实上，

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)}=\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}.$$

【1881】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解 设 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，通分后应有 $1\equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1882】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

解 设$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$,通分后应有 $x\equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$. 比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & A-B+C=1, \\ x^0 & A-C=0. \end{array}$$

由此,$A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$. 于是,

$$\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1883】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

提示 本题若用待定系数法,较麻烦一些. 可将被积函数变形为$\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1})$后,即易获解.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$

本题若用待定系数法,则较麻烦. 从略.

【1884】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解题思路 本题若用待定系数法,较麻烦一些. 可将被积函数变形为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}-\frac{x^2-1}{x^4+1}\right),$$

然后利用 1712 题及 1713 题的结果,并注意

$$\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right),$$

即可获得所需的答案.

解 本题如用待定系数法来作,主要步骤如下:

设 $\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$,经计算可求得$A=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$. 于是,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x+\int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

如应用下列解法，则更简单些.

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}^{**)}+C_1,$$

注意到 $\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$，最后即得

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

*) 利用 1712 题的结果.

**) 利用 1713 题的结果.

【1885】 $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

解 设 $\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$，通分后应有 $1\equiv(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$.
比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -A+B+C+D=0, \\ x^1 & A-B+C+D=0, \\ x^0 & B+D=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{2}$，$D=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+x+1}dx-\int\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{4}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}[\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)]+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}\right)+C_1=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C.$$

如不用待定系数法解本题，则更简单些，解法与上题类似：

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C.$$

【1886】 $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

解 本题如用待定系数法来作，运算较麻烦，经计算可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{-\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1},$$

积分步骤与 1884 题与 1885 题完全类似，不再详解，其结果为

$$\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan(x^3)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

本题如不用待定系数法来作，则更简单些. 下面列举两种解法：

解法 1：

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^6+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx=\frac{1}{6}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{6}\arctan(x^3)+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

解法 2：仿照 1881 题的分解法，可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x^2-2)dx}{x^4-x^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}\arctan x-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{6}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

两种答案形式不同，实质上是一致的.

【1887】 $\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

解 设 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)+B(x^2+1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1)+(Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

x^5	$A+C+E=0$,
x^4	$B+C+D+2E+F=0$,
x^3	$A-B+D+2E+2F=0$,
x^2	$A+2B+C+2E+2F=0$,
x^1	$-B+C+D+E+2F=0$,
x^0	$A+B+D+F=1$.

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=\frac{1}{6}$，$C=0$，$D=\frac{1}{2}$，$E=-\frac{1}{3}$，$F=0$. 于是，

$$\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{6(x+1)^2}+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{x}{3(x^2-x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\mathrm{d}x}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【1888】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

解 设 $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}$,

通分后应有 $1\equiv A(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+x+1)$.

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+B+D=0, \\ x^3 & -2B+C+E=0, \\ x^2 & A+2B-2C=0, \\ x^1 & -B+2C-D=0, \\ x^0 & A-C-E=1. \end{array}$$

由此,$A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{6}$, $D=0$, $E=-\frac{1}{2}$. 于是,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2-x+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【1889】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

解 设 $\frac{x^2}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}}$,通分后应有

$$x^2\equiv(Ax+B)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B+2C+D=1, \\ x^1 & \frac{A}{2}+B+2C+2D=0, \\ x^0 & \frac{B}{2}+2D=0. \end{array}$$

由此,$A=\frac{4}{5}$,$B=\frac{12}{5}$,$C=-\frac{4}{5}$,$D=-\frac{3}{5}$. 于是,

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}=\int\left[\frac{4(x+3)}{5(x^2+2x+2)}-\frac{4x+3}{5\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{(2x+2)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}-\frac{2}{5}\int\frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{x^2+x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\arctan(x+1)-\frac{2}{5}\arctan(2x+1)+C.$$

【1890】 在什么条件下，积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数？

解 设 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$，通分后应有

$$ax^2+bx+c\equiv Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+D=0, \\ x^3 & -2A+B-D+E=0, \\ x^2 & A-2B+C=a, \\ x^1 & B-2C=b, \\ x^0 & C=c. \end{array}$$

由此，$A=a+2b+3c$，$B=b+2c$，$C=c$，$D=-(a+2b+3c)$，$E=a+b+c$. 当 $A=D=0$，即 $a+2b+3c=0$ 时，积分 $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数.

利用奥斯特罗格拉茨基方法：*，求积分：

【1891】 $\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 $Q=(x-1)^2(x+1)^3$， $Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$， $Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1$.

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2-1}$，从而，

$$x\equiv(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & D=0, \\ x^3 & -A+D+E=0, \\ x^2 & A-2B-D+E=0, \\ x^1 & -2A+B-3C-D-E=1, \\ x^0 & -B+C-E=0. \end{array}$$

由此，$A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=-\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=-\frac{1}{8}$. 于是，

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2-1}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$$

【1892】 $\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

---

* 所谓奥斯特罗格拉茨基方法，是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分，可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和，使在新的被积真分式函数中，其分母次数达到最低状态，也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

中，如果 $P(x)$，$Q(x)$ 已知，且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式：

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots.$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$ 是正整数. 在公式(1)的右端分母已知，形如：

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots, Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$. 而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式，一般可用待定系数法求得. 这种利用公式(1)求积分的方法，就是所谓的奥斯特罗格拉茨基方法. 详细可以参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著(北京大学译)，微积分学教程，第二卷一分册，第 264 目.

——《题解》作者注

提示 令 $\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$,并利用 1881 题的结果.

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$, $Q_1=Q_2=x^3+1$.

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$, 从而,

$$1\equiv(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+E=0, \\ x^3 & -2B+F=0, \\ x^2 & -3C+D=0, \\ x^1 & 2A+E=0, \\ x^0 & B+F=1. \end{array}$$

由此,$A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=\frac{2}{3}$. 于是,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1893】 $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

解 $Q=(x^2+1)^3$, $Q_1=(x^2+1)^2$, $Q_2=x^2+1$.

设 $\frac{1}{(x^2+1)^3}=\left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right]'+\frac{Ex+F}{x^2+1}$, 从而,

$$1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)-4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex+F)(x^2+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^5 & E=0, \\ x^4 & -A+F=0, \\ x^3 & -2B+2E=0, \\ x^2 & 3A-3C+2F=0, \\ x^1 & 2B-4D+E=0, \\ x^0 & C+F=1. \end{array}$$

由此,$A=\frac{3}{8}$, $B=0$, $C=\frac{5}{8}$, $D=0$, $E=0$,$F=\frac{3}{8}$. 于是,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\arctan x+C.$$

【1894】 $\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

提示 本题如不用奥斯特罗格拉茨基方法,可有更简单的方法. 事实上,有

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}.$$

解 $Q=(x^2+2x+2)^2$, $Q_1=Q_2=x^2+2x+2$.

设 $\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$, 从而,

$$x^2\equiv A(x^2+2x+2)-2(x+1)(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & C=0, \\
x^2 & -A+2C+D=1, \\
x^1 & -2B+2C+2D=0, \\
x^0 & 2A-2B+2D=0.
\end{array}
$$

由此，$A=0$，$B=1$，$C=0$，$D=1$. 于是，

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int \frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+C.$$

本题如不用奥斯特罗格拉茨基方法，则更容易得出上述结果. 事实上，

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int \frac{dx}{x^2+2x+2}-\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}-\int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C.$$

【1895】 $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

解 $Q=(x^4+1)^2$，$Q_1=Q_2=x^4+1$，

设 $\frac{1}{(x^4+1)^2}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)'+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}$，从而，

$$1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 & E=0, \\
x^6 & -A+F=0, \\
x^5 & -2B+G=0, \\
x^4 & -3C+H=0, \\
x^3 & -4D+E=0, \\
x^2 & 3A+F=0, \\
x^1 & 2B+G=0, \\
x^0 & C+H=1.
\end{array}
$$

由此，$A=0$，$B=0$，$C=\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，$G=0$，$H=\frac{3}{4}$. 于是，

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}^{*)}+C.$$

*） 利用 1884 题的结果.

【1896】 $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

解 $Q=(x-1)(x^2+x+1)^2$，　$Q_1=x^2+x+1$，　$Q_2=(x-1)(x^2+x+1)$.

设 $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)}$，从而，

$$x^2+3x-2\equiv A(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(Ax+B)(x-1)+(Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 & C=0, \\
x^3 & -A+C+D=0, \\
x^2 & A-2B+C+D+E=1, \\
x^1 & A+B+D+E=3, \\
x^0 & -A+B+E=-2.
\end{array}
$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=\frac{2}{3}$，$C=0$，$D=\frac{5}{3}$，$E=-1$，再将$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$分解，可得

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{9(x-1)}-\frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是，
$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【1897】 $\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

解 $Q=(x^4-1)^3$，$Q_1=(x^4-1)^2$，$Q_2=x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2}\right]'+\frac{P_1(x)}{x^4-1}$，其中

$$P(x)=Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H,\qquad P_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1,$$

从而，利用待定系数法，解出 $A=0$，$B=0$，$C=\frac{7}{32}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，$G=-\frac{11}{32}$，$H=0$，$A_1=0$，$B_1=0$，$C_1=0$，$D_1=\frac{21}{32}$. 于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\arctan x^{*)}+C.$$

*） 利用 1883 题的结果.

分出下列积分的代数部分：

【1898】 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

解 设 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1}dx$.

上述等式右端的积分为非代数部分，因此，只需要求出 A、B、C、D 就可以了. 等式两端求导并通分，得

$$x^2+1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)\cdot(x^4+x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=\frac{1}{6}$，$B=0$，$C=\frac{1}{3}$，$D=0$，$A_1=0$，$B_1=\frac{1}{6}$，$C_1=0$，$D_1=\frac{2}{3}$. 因此，所求积分的代数部分为 $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$.

【1899】$^+$ $\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

解 设 $\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^3+x+1)^2}+\int\frac{Gx^2+Hx+L}{x^3+x+1}dx$.

对上述等式两端求导并通分，得

$$1\equiv(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(x^3+x+1)-2(3x^2+1)(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+(Gx^2+Hx+L)(x^3+x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=-\frac{243}{961}$，$B=\frac{357}{1922}$，$C=-\frac{405}{961}$，$D=-\frac{315}{1922}$，$E=\frac{156}{961}$，$F=-\frac{224}{961}$，$G=0$，$H=-\frac{243}{961}$，$L=\frac{357}{961}$. 因此，所求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448}{1922(x^3+x+1)^2}.$$

【1900】 $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}+\int\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M}{x^5+x+1}\mathrm{d}x.$

对上述等式两端求导再通分，得

$$4x^5-1\equiv(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^5+x+1)-(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)+(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M)(x^5+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=-1$, $E=0$, $F=0$, $G=0$, $H=0$, $L=0$, $M=0$. 因此，所求积分的代数部分为 $-\frac{x}{x^5+x+1}$（全部积分）.

【1901】 计算积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.

解 $Q=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$, $Q_1=Q_2=x^2+x+1$.

设 $\frac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$，从而，

$$1\equiv A(x^2+x+1)-(2x+1)(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=\frac{2}{3}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【1902】 在什么条件下，积分 $\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\mathrm{d}x$ 为有理函数？

解 (1) 当 $a\neq0$ 且 $b^2-ac=0$ 时，$ax^2+2bx+c=a(x-x_0)^2$，其中 x_0 为实数. 此时

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}=\frac{\alpha(x-x_0)^2+2\alpha x_0(x-x_0)+\alpha x_0^2+2\beta(x-x_0)+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

$$=\frac{\alpha}{a^2(x-x_0)^2}+\frac{2\alpha x_0+2\beta}{a^2(x-x_0)^3}+\frac{\alpha x_0^2+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4},$$

从而，积分为有理函数.

(2) 当 $a\neq0$ 且 $b^2-ac\neq0$ 时，则设

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}=\left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\right)'+\frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c},$$

从而，$\alpha x^2+2\beta x+\gamma\equiv A(ax^2+2bx+c)-(2ax+2b)(Ax+B)+(Cx+D)(ax^2+2bx+c)$.

比较等式两端 x 的同次幂系数，可解得 $C=0$, $D=\frac{2b\beta-a\gamma-c\alpha}{2(b^2-ac)}$. 从而，当 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 时 $D=0$，此时积分为有理函数.

(3) 当 $a=0$, $b\neq0$ 时，

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}=\frac{\alpha\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2-\frac{\alpha c}{b}\left(x+\frac{c}{2b}\right)+\frac{\alpha c^2}{4b^2}+2\beta\left(x+\frac{c}{2b}\right)-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}$$

$$=\frac{\alpha}{4b^2}+\frac{2\beta-\frac{\alpha c}{b}}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)}+\frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2}-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}.$$

故当 $2\beta-\frac{ac}{b}=0$ 即 $ac=2b\beta$ 时，积分为有理函数. 这种情况可归并到 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 中去.

(4) 当 $a=b=0$，$c\neq 0$ 时，积分显然为有理函数. 这种情况可归并到 $b^2-ac=0$ 中去.

综上所述，当 $b^2-ac=0$ 或 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 时，积分为有理函数.

利用不同方法，计算下列积分：

【1903】 $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x=\int\frac{[(x-1)+1]^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C$$

【1904】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^8-1}$.

提示 利用 1883 题的结果.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^4-1}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan(x^2)^{*)}+C.$

*) 利用 1883 题的结果.

【1905】 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+3}$.

解 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+3}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^4)}{(x^4)^2+3}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right)+C.$

【1906】 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ \frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^3+1}$，并利用 1881 题的结果.

解 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1907】 $\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(1-\frac{3}{x^4}\right)\mathrm{d}x}{x^5\left(1+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^8}\right)}=\int\frac{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x^4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^8}+\frac{3}{x^4}+1}$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{\frac{2}{x^4}+1}-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^4}\right)=-\frac{5}{8}\ln\left(\frac{2}{x^4}+1\right)+\ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right)+C$$

$$=\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}+C.$$

【1908】 $\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(x^{10}-10)^2}$.

解 $\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(x^{10}-10)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5)}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}=\frac{1}{200}\int\frac{[(x^5-\sqrt{10})-(x^5+\sqrt{10})]^2}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}\mathrm{d}(x^5)$

$$=\frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{x^5-\sqrt{10}}-\frac{1}{x^5+\sqrt{10}}\right)^2 d(x^5)=\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})^2}-\frac{1}{100}\int\frac{d(x^5)}{(x^5)^2-10}+\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5+\sqrt{10})}{(x^5+\sqrt{10})^2}$$

$$=-\frac{1}{200(x^5-\sqrt{10})}-\frac{1}{200\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|-\frac{1}{200(x^5+\sqrt{10})}+C$$

$$=-\frac{1}{100}\left[\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right]+C.$$

【1909】 $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$.

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8d(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]d(x^4)$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]d(x^4)=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}+C.$$

【1910】 $\int\frac{x^9dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

解 $\int\frac{x^9dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{x^5d(x^5)}{[(x^5+1)^2+1]^2}=\frac{1}{5}\int\frac{(x^5+1)d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$

$$=\frac{1}{10}\int\frac{d[(x^5+1)^2+1]}{[(x^5+1)^2+1]^2}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}=-\frac{1}{10[(x^5+1)^2+1]}-\frac{1}{5}\left\{\frac{x^5+1}{2[(x^5+1)^2+1]}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arctan(x^5+1)\right\}^{*)}+C=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C.$$

*) 利用 1817 题的结果.

【1911】 $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

提示 分别就 $n\neq0$ 及 $n=0$ 两种情况求解.

解 当 $n\neq0$ 时,

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\int\frac{x^n x^{n-1}dx}{x^n+1}=\frac{1}{n}\int\frac{x^nd(x^n)}{x^n+1}=\frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n)=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C;$$

当 $n=0$ 时,
$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

【1912】 $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$.

提示 当 $n\neq0$ 时,经恒等变形后可利用 1817 题的结果. 当 $n=0$ 时,易获解.

解 当 $n\neq0$ 时,

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\int\frac{x^{2n}x^{n-1}dx}{(x^{2n}+1)^2}=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}=\frac{1}{n}\int\frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{x^{2n}+1}-\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}=\frac{1}{n}\arctan(x^n)-\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{2(x^{2n}+1)}+\frac{1}{2}\arctan(x^n)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\arctan(x^n)-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right]+C.$$

当 $n=0$ 时,
$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C.$$

*) 利用 1817 题的结果.

【1913】 $\int\frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

解 $\int\frac{dx}{x(x^{10}+2)}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\int\frac{d(x^{10}+2)}{x^{10}+2}$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C=\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+C.$$

【1914】 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

提示 两次使用 $1=x^{10}+1-x^{10}$，就可将被积函数变形为 $\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$，从而易获解.

解 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x(x^{10}+1)}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以，

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right]dx=\ln|x|-\frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1}-\frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

【1915】 $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

解

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)dx=\ln|x|-\frac{2}{7}\int\frac{d(1+x^7)}{1+x^7}=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+C.$$

【1916】 $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx$.

解

$$\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5-5x}-\frac{1}{x^5-5x+1}\right)d(x^5-5x)=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x)}{x^5-5x}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5x)}{x^5-5x+1}\right|+C.$$

【1917】 $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$.

解 由于

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right),$$

所以，

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C.$$

【1918】 $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

解

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}$$

$$=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

【1919】 $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx$.

解

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1}d(x^2)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}{}^{*)}+C.$$

*） 利用 1713 题的结果.

【1920】 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

解 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx=\int \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx+\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$

$=\int \frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C.$

【1921】 试导出用于计算积分 $I_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}(a\neq 0)$的递推公式. 利用这个公式计算

$$I_3=\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

解题思路 首先，注意

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta,$$

其中 $t=2ax+b$, $\Delta=4ac-b^2$. 这样，原积分就变形为 $2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$.

其次，当 $\Delta\neq 0$ 时，对积分 $\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$使用分部积分法，并注意 $t^2=t^2+\Delta-\Delta$，经运算即可得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时，易获解.

解 由于 $4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta$，其中 $t=2ax+b$, $\Delta=4ac-b^2$. 于是，

$$I_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\int \frac{(4a)^n dx}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}=2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当 $\Delta\neq 0$ 时，对于积分 $\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$施用分部积分法，即有

$$\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int \frac{t^2dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int \frac{(t^2+\Delta)-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}}dt$$

$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}-2n\Delta\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}.$$

若令 $\bar{I}_n=\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$，则得 $\bar{I}_n=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\bar{I}_n-2n\Delta\bar{I}_{n+1}$,

或 $\bar{I}_{n+1}=\frac{1}{2n\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_n$，从而，

$$\bar{I}_n=\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_{n-1}.$$

代入 I_n，即得

$$I_n=2^{2n-1}a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_{n-1}\right\}$$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\}=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1},$$

最后得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时，则有

$$I_n=\int \frac{(4a)^n dx}{(2ax+b)^{2n}}=2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}=\frac{1}{a^n(1-2n)}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{1-2n}+C.$$

对于 I_3，$\Delta\neq 0$，两次运用上述递推公式，即得

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【1922】 利用代换 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$计算积分：

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}.\quad (m\text{ 及 }n\text{ 为正整数}).$$

利用这个代换，求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

解 设 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$,则 $1-t=\dfrac{b-a}{x+b}$ 或 $x+b=\dfrac{b-a}{1-t}$, $\mathrm{d}t=\dfrac{b-a}{(x+b)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{(1-t)^2}{b-a}\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}x=\dfrac{b-a}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$,

及 $x+a=t(x+b)=\dfrac{t(b-a)}{1-t}$. 代入 I,即得

$$I=\frac{I}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}\mathrm{d}t\quad (a\neq b).$$

将$(1-t)^{m+n-2}$展开，即可分项积分求得 I.

如果 $b=a$,则

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^{m+n}}=\frac{1}{1-m-n}(x+a)^{1-m-n}+C.$$

令 $a=-2$, $b=3$, $m=2$ 及 $n=3$,并设 $t=\dfrac{x-2}{x+3}$, 即得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}=\frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{5^4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{t^2}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{625}\left[-\frac{x+3}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+\frac{3(x-2)}{x+3}-\frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\right]+C.$$

【1923】 若 $P_n(x)$为 x 的 n 次多项式，计算 $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\mathrm{d}x$.

提示 利用泰勒公式.

解 由于 $P_n(x)$为 x 的 n 次多项式，故得

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

其中 $P_n^{(0)}(a)=P_n(a)$, $0!=1$. 于是，

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}P_n^{(k)}(a)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{n-k+1}}+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\ln|x-a|+C,$$

其中 $\dfrac{P_n^{(n)}(a)}{n!}=a_0$ 为 $P_n(x)$的首项系数，即

$$P_n(x)=a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x-a)+a_n.$$

【1924】$^+$ 设 $R(x)=R^*(x^2)$,其中 R^* 为有理函数，则函数 $R(x)$分解为有理分式时有什么特性？

解 设 $R^*(x)=P(x)+H(x)$,其中 $P(x)$是多项式；若 $R^*(x)$本身也为多项式，则 $H(x)\equiv 0$；否则$H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$是真分式，而 $P_1(x)$,$Q_1(x)$也均为多项式.

设 $Q_1(x)$有非负实根为 a_i^2,其重数为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$；负根为 $-b_k^2$,其重数为 $\beta_k(k=1,2,\cdots,t)$；二次因式为 $x^2+C_px+D_p$,其重数为 $\gamma_p(p=1,2,\cdots,s)$,其中 $C_p^2-4D_p<0$. 于是，

$$Q_1(x)=\begin{cases} a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\prod_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\prod_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p}, & m\neq 0,\ t\neq 0,\ s\neq 0,\\ a_0\prod_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\prod_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p}, & m=0,\ t\neq 0,\ s\neq 0,\\ a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\prod_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p}, & m\neq 0,\ t=0,\ s\neq 0,\\ a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\prod_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}, & m\neq 0,\ t\neq 0,\ s=0,\\ a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}, & m\neq 0, t=0, s=0,\\ a_0\prod_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}, & m=0, t\neq 0, s=0,\\ a_0\prod_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p}, & m=0, t=0, s\neq 0. \end{cases}$$

以下就 $Q_1(x)$ 表达式中的第一种情形予以论证.

由 $C_p^2-4D_p<0$,可得

$$x^4+C_px^2+D_p=(x^2+E_px+F_p)(x^2-E_px+F_p)\quad(p=1,2,\cdots,s),$$

则此时有

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{\alpha_i}(x+a_i)^{\alpha_i}\prod_{k=1}^{t}(x^2+b_k^2)^{\beta_k}\prod_{p=1}^{s}(x^2+E_px+F_p)^{\gamma_p}(x^2-E_px+F_p)^{\gamma_p},$$

以及

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\iota=1}^{\alpha_i}\left[\frac{A_{i\iota}}{(a_i-x)^{\iota}}+\frac{A'_{i\iota}}{(a_i+x)^{\iota}}\right]+\sum_{k=1}^{t}\sum_{\iota=1}^{\beta_k}\frac{B_{k\iota}x+C_{k\iota}}{(x^2+b_k^2)^{\iota}}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{\iota=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{p\iota}x+N_{p\iota}}{(x^2+E_px+F_p)^{\iota}}+\frac{M'_{p\iota}x+N'_{p\iota}}{(x^2-E_px+F_p)^{\iota}}\right].$$

显然有 $H(x^2)=H((-x)^2)$,由 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性,比较系数,即得常数关系为:

$$A'_{i\iota_1}=A_{i\iota_1},\ M'_{p\iota_2}=-M_{p\iota_2},\ N'_{p\iota_2}=N_{p\iota_2},\ B_{k\iota_3}=0.$$

$$(\iota_1=1,2,\cdots,a_i,\ i=1,2,\cdots,m;\iota_2=1,2,\cdots,\gamma_p,\ p=1,2,\cdots,s;\iota_3=1,2,\cdots,\beta_k,\ k=1,2,\cdots,t)$$

最后得 $$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\iota=1}^{\alpha_i}A_{i\iota}\left[\frac{1}{(a_i-x)^{\iota}}+\frac{1}{(a_i+x)^{\iota}}\right]+\sum_{k=1}^{t}\sum_{\iota=1}^{\beta_k}\frac{C_{k\iota}}{(x^2+b_k^2)^{\iota}}$$

$$+\sum_{p=1}^{s}\sum_{\iota=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{p\iota}x+N_{p\iota}}{(x^2+E_px+F_p)^{\iota}}-\frac{M_{p\iota}x-N_{p\iota}}{(x^2-E_px+F_p)^{\iota}}\right].$$

如若 $H(x)\neq 0$,而 $m=0$,但 $t\neq 0$, $s\neq 0$ 时,则在上述表达式中就应缺乏第二项的和式,形如

$$R(x)=P(x^2)+\sum_{k=1}^{t}\sum_{\iota=1}^{\beta_k}\ +\sum_{p=1}^{s}\sum_{\iota=1}^{\gamma_p}\ ,$$

其他情形可以类似推演,此处不再一一细叙. 至于当 $H(x)\equiv 0$ 时,当然有 $R(x)=P(x^2)$.

另外,本题也可在复数域上作分解考虑.

仍记 $R^*(x)=P(x)+H(x)$,其中 $P(x)$ 为多项式,而 $H(x)$ 要么是零(当 $R^*(x)$ 为多项式时),要么是一个真分式,例如 $H(x)\neq 0$ 时,记 $H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是其真分式. $P_1(x)$,$Q_1(x)$ 为多项式. 若记 $Q_1(x)$ 在复数域中的根为 α_i,其相应重数记为 $n_i(i=1,2,\cdots,m;$ 显然 $m\geqslant 1)$,即

$$Q_1(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{n_i},$$

那么 $Q_1(x^2)$ 中的每一项 x^2-a_i 可分解为一次式乘积

$$x^2-a_i=(x-b_i)(x+b_i),$$

于是，
$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-b_i)^{n_i}(x+b_i)^{n_i}.$$

相应地有 $H(x^2)=\dfrac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n_i}\left[\dfrac{B_{ik}}{(x-b_i)^k}+\dfrac{B'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right]=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n_i}\left[\dfrac{A_{ik}}{(x-b_i)^k}+\dfrac{A'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right].$

由 $H(x^2)=H((-x)^2)$，从 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性，比较系数，即得

$$A'_{ik}=A_{ik}(k=1,2,\cdots,n_i;\ i=1,2,\cdots,m).$$

最后得到
$$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ik}}{(b_i-x)^k}+\frac{A_{ik}}{(b_i+x)^k}\right],$$

其中 b_i 为分母 $Q_1(x^2)$ 的根，A_{ik} 为常系数.

【1925】 计算 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$，式中 n 为正整数.

解 先将被积函数分解成部分分式之和，我们可以证明：

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

事实上，记多项式 $x^{2n}+1$ 的 $2n$ 个根为 a_k $(k=1,2,\cdots,2n)$，显然 $a_k=\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$.

于是，

$$|a_k|=1,\quad a_k^{2n}=-1,\quad \bar{a}_k=a_{2n-k+1},\ a_k\bar{a}_k=1,\quad a_k+\bar{a}_k=2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

设 $\dfrac{1}{1+x^{2n}}=\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{A_k}{x-a_k}$，

即
$$1=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}.$$

令 $x\to a_i$，并应用洛必达法则，即得

$$1=\lim_{x\to a_i}\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}=\lim_{x\to a_i}\frac{A_i(1+x^{2n})}{x-a_i}=\lim_{x\to a_i}(2nA_ix^{2n-1})=2nA_i\frac{a_i^{2n}}{a_i}=-\frac{2nA_i}{a_i}\quad(i=1,2,\cdots,2n),$$

即 $A_k=-\dfrac{a_k}{2n}$ $(k=1,2,\cdots,2n)$. 于是，

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{a_k}{x-a_k}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{x-a_k}+\frac{\bar{a}_k}{x-\bar{a}_k}\right)=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+\bar{a}_k)x-2a_k\bar{a}_k}{x^2-(a_k+\bar{a}_k)x+a_k\bar{a}_k}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

最后得到
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x\right)$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]$$
$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right]$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)+C.$$

§3. 无理函数的积分法

利用化被积函数为有理函数的方法，求下列积分：

【1926】 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int \frac{tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2[t-\ln(1+t)]+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

【1927】 $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

解 设 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$dx=6t^5dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=6\int \frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)}=6\int \frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)}=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)}\right]dt$$

$$=6\left\{\ln t-\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{3}{8}\int \frac{4t-1}{2t^2-t+1}dt-\frac{1}{16}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\right\}$$

$$=6\left\{\ln|t|-\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{3}{8}\ln(2t^2-t+1)-\frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right\}+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{t^8}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}}+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$$

【1928】 $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

解 设 $\sqrt[3]{2+x}=t$，则 $x=t^3-2$，$dx=3t^2dt$. 代入得

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx=3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\int\left[-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{\frac{5}{4}t-\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right]dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\int \frac{2t+1}{t^2+t+2}dt-\frac{27}{8}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[3]{2+x}$.

【1929】 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

提示 令 $\sqrt[6]{x+1}=t$.

解 设 $\sqrt[6]{x+1}=t$，则 $x=t^6-1$，$dx=6t^5dt$. 代入得

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=6\int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}dt=6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\arctan t+C,$$

其中 $t=\sqrt[6]{x+1}$.

【1930】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

解 设 $\sqrt[4]{x}=t$,则 $x=t^4$, $\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}=4\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)^3}=4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right]\mathrm{d}t=-\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}+C$$

$$=\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

【1931】 $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}=x-\sqrt{x^2-1}$.

解 设 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t$, 则 $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\mathrm{d}x=-4\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)^3}$$

$$=\int\left[-\frac{2}{(t+1)^3}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

如果不限制将被积函数化为有理函数,本题的解法可简单些.事实上,

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}\mathrm{d}x=\int(x-\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

【1932】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

提示 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, 则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $\mathrm{d}x=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

【1933】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\quad(a>0)$.

提示 令 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$,并分别利用 1921 题的递推公式及 1884 题的结果.

解 设 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$, 则 $x=\frac{a}{1+t^4}$, $\mathrm{d}x=-\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}}=-4a\int\frac{t^2}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t=-4a\int\left[\frac{t}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right]^2\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right)^2 dt=-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}+a\int\frac{dt}{t^4+1}.$$

现在分别求上述积分，利用 1921 题的递推公式，即得

$$\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t-1)+C_1$$

及 $$\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)+C_2.$$

利用 1884 题的结果，即得 $\int\frac{dt}{t^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C_3.$

最后得到

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=-\frac{a}{2}\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right]-\frac{a\sqrt{2}}{2}[\arctan(\sqrt{2}t-1)+\arctan(\sqrt{2}t+1)]$$

$$+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)+C_4$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)+C_4$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$ $(0<x<a)$.

【1934】 $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ （n 为正整数）.

解 当 $a=b$ 时，显然被积函数为 $(x-a)^{-2}$，因此，所求的积分为 $-\frac{1}{x-a}+C$；当 $a\neq b$ 时，设 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}=t$，

则 $$x=a+\frac{a-b}{t^n-1},\quad dx=-\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt,\ x-a=\frac{a-b}{t^n-1},\quad x-b=\frac{(a-b)t^n}{t^n-1}.$$

代入得 $$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=-\frac{n}{a-b}\int dt=-\frac{n}{a-b}t+C=-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

【1935】 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

提示 设 $\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$，并限制 $t>1$.

解 设 $\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$ 并限制 $t>1$，则 $x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$，$dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt$，$\sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t}$，$t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

代入得 $$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{t^4-1}{t^3(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C.$$

【1936】 证明：若 $p+q=kn$，式中 k 为整数，则积分

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x$$

（式中 R 为有理函数及 p,q,n 为整数）为初等函数.

证 当 $a=b$ 时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^{k}$，则积分显然为初等函数.

当 $a\neq b$ 时，设 $\frac{x-a}{x-b}=y\ (\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y},\quad \mathrm{d}x=\frac{a-b}{(1-y)^2}\mathrm{d}y,\quad x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得 $$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{k}\right]\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}.$$

再设 $\sqrt[n]{y}=t$，则 $y=t^n$，$\mathrm{d}y=nt^{n-1}\mathrm{d}t$. 从而，上述积分化为

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n},t^{p}\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^{k}\right]\frac{t^{n}-1}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t,$$

因为被积函数为 t 的有理函数，所以，积分是初等函数.

求最简单二次无理式的积分：

【1937】 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C.$$

【1938】$^{+}$ $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$

解 设 $x+1=\frac{1}{t}$，则 $x=\frac{1-t}{t}$，$\mathrm{d}t=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|}=\operatorname{sgn}t\,\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}$.

代入得 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=-\operatorname{sgn}t\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{t^2-t+1}}=-\operatorname{sgn}t\,\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_1$$

$$=-\operatorname{sgn}(x+1)\ln\left|\frac{1-x+2[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right|+C_1.$$

当 $x+1>0$ 时， $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C;$$

当 $x+1<0$ 时， $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left|\frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})}\right|+C_1=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

总之， $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

【1939】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}.$

提示 令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t.$

解 设$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$,则 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$, $1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}$.

代入得 $$\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}dt=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

【1940】 $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

提示 令 $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$.

解 设 $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$,则 $x=\frac{t^2-2}{2(t+1)}$, $dx=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt$, $\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}$.

代入得
$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[1+\frac{2}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right]dt$$
$$=\frac{t}{2}+\ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}-\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C_1$$
$$=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C.$$

【1941】 $\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

提示 令 $1+x=\frac{1}{t}$,并就 $1+x>0$ 及 $1+x<0$ 两种情况分别求解.

解 设 $1+x=\frac{1}{t}$,则 $x=\frac{1-t}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, $\sqrt{1-x-x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{|t|}=\operatorname{sgn}t\,\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t}$.

代入得
$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}\right)dx$$
$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}+\operatorname{sgn}t\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t-1}}$$
$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+[\operatorname{sgn}(1+x)]\ln\left|\frac{3+x+2[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1.$$

当 $x+1>0$ 时, $$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C;$$

当 $x+1<0$ 时, $$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)-\ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1$$
$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

总之, $$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C.$$

注 以后诸题中,出现二次无理式时也会碰到用 sgn$t$ 的问题,可参照 1938 题及 1941 题类似地处理.在解这类习题时,不妨就开方后取正值求解.如无特殊情况,今后不再另加说明.

【1942】 $\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

解 $$\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=-\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+2\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

利用公式 $\int\frac{P_n(x)}{y}\mathrm{d}x=Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$，式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，$P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 λ 为常数，求下列积分：

【1943】 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x=(ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$，

两边对 x 求导数，得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}+\frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3\equiv(2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{array}$$

由此，$a=-\frac{1}{3}$，$b=-\frac{5}{6}$，$c=-\frac{19}{6}$，$\lambda=4$. 于是，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

【1944】 $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)\sqrt{1+x^2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$，

从而有

$$x^{10}\equiv(9ax^8+8bx^7+7cx^6+6dx^5+5ex^4+4fx^3+3gx^2+2hx+l)(1+x^2)$$
$$+x(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{10},b=0,c=-\frac{9}{80},d=0,e=\frac{21}{160},f=0,g=-\frac{21}{128},h=0,l=\frac{63}{256},m=0,\lambda=-\frac{63}{256}.$$

于是，$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{1}{10}x^9\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

【1945】 $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，

从而有 $x^4(a^2-x^2)\equiv(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$

比较等式两端 x 同次幂的系数，求得

$$A=\frac{1}{6},\quad B=0,\quad C=-\frac{a^2}{24},\quad D=0, E=-\frac{a^4}{16},\quad F=0,\quad \lambda=\frac{a^4}{16}.$$

于是，$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left(\frac{1}{6}x^5-\frac{a^2}{24}x^3-\frac{a^4}{16}x\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\quad(a\neq0).$$

【1946】 $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

解 设$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}},$$

从而有 $$x^3-6x^2+11x-6\equiv(2ax+b)(x^2+4x+3)+(x+2)(ax^2+bx+c)+\lambda.$$

比较等式两端 x 同次幂的系数，求得 $a=\frac{1}{3},\quad b=-\frac{14}{3},\quad c=37,\quad \lambda=-66.$

于是，$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$$

【1947】 $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，这里碰到二次无理式 $\sqrt{x^2+1}$ 需引用 sgn$t$ 的问题，不妨设

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\quad(t>0).$$

代入得 $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt=-\int\frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=-\int\sqrt{t^2+1}\,dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=-\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

【1948】$^+$ $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

解 不妨设 $x=\frac{1}{t}>0$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 由 $|x|>1$ 知必有 $|t|<1$，则有

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\quad(0<t<1).$$

代入得 $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{t(1-t^2)-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int t\sqrt{1-t^2}\,dt-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{\frac{1}{2}}d(1-t^2)+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-t^2)=-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1+2x^2}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C.$$

【1949】$^+$ $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$

解 设 $x-1=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$，则有

$$\sqrt{x^2+3x+1}=\frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

代入得 $$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt=(at+b)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},$$

从而有 $$-t^2\equiv a(1+5t+5t^2)+\left(5t+\frac{5}{2}\right)(at+b)+\lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数，求得 $a=-\frac{1}{10},\quad b=\frac{3}{20},\quad \lambda=-\frac{11}{40}.$

于是，$$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=\left(-\frac{t}{10}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40}\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

$$=\frac{3-2t}{20}\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C_1$$

$$=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C.$$

【1950】 $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

解 设 $x+1=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 先设 $t>0$,则有 $\sqrt{x^2+2x}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$.

代入得 $$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt=(at^3+bt^2+ct+e)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

从而有 $$-t^4\equiv(3at^2+2bt+c)(1-t^2)-t(at^3+bt^2+ct+e)+\lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数,求得 $a=\frac{1}{4}$, $b=0$, $c=\frac{3}{8}$, $e=0$, $\lambda=-\frac{3}{8}$.

于是, $$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$$

再设 $t<0$,则答案前一项不改变符号,但后一项要改变符号,因此,最后得到

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C,$$

其中 $x>0$ 或 $x<-2$.

【1951】 在什么条件下,积分 $\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 是代数函数?

解 设 $$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

从而有 $$a_1x^2+b_1x+c_1\equiv A(ax^2+bx+c)+\left(ax+\frac{b}{2}\right)(Ax+B)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,当 $a\neq0$ 时求得

$$A=\frac{a_1}{2a},\quad B=\frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2},\lambda=\frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是,当 $a\neq0$ 且 $8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$ 时,$\lambda=0$,积分为代数函数;当 $a=0$ 时积分显然为代数函数.

分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式,求积分 $\int\frac{P(x)}{Q(x)y}dx$,式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

【1952】 $\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

解 $$\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

设 $x-1=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$,则有 $\sqrt{1+2x-x^2}=\frac{\sqrt{2t^2-1}}{t}$.

代入得 $$\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{2t^2-1}}-\int\frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right|+C$$

$$=\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+C.$$

【1953】 $\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x-1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2.$$

对于 I_1，设 $x+1=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. 不妨设 $t>0$，则有 $\sqrt{x^2-x-1}=\frac{\sqrt{t^2-3t+1}}{t}$.

代入 I_1，得 $\quad I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-3t+1}}=-\ln\left|t-\frac{3}{2}+\sqrt{t^2-3t+1}\right|+C_1$

$$=-\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于 I_2，设 $x-1=\frac{1}{t}$，同上可得 $\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}=\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C_3$.

于是，$\quad \int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C.$

【1954】 $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=I_1-I_2+I_3.$$

对于 I_1，显然有 $\quad I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C_1;$

对于 I_2，利用 1938 题的结果，即得

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于 I_3，设 $x+1=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. 不妨设 $t>0$，则有 $\quad \sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}$.

代入 I_3，得 $\quad I_3=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t+1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t+1}}$

$$=-\sqrt{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_4.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

如用下述解法更简单些：

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\int\sqrt{x^2+x+1}\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|^{*)}+C.$$

*） 利用 1938 题的结果.

【1955】 $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

解 $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \int \frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$= \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx - \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

$= -\int \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$

$= -\int \sqrt{2-(x-1)^2}\,d(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 3\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} - I_1$

$= \frac{1-x}{2}\sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{1+2x-x^2} + 3\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1$

$= -\frac{x+1}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1$.

对于 I_1，设 $x+1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right) + C_1.$$

于是，最后得到

$$\int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2} - 2\arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right) + C.$$

【1956】 $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

$= \int \frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} - \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = 2I_1 - I_2$.

对于 I_1，设 $x-2=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} = -\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) + C_1;$$

对于 I_2，设 $x-1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C_2.$$

于是，最后得到

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} = -2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) - \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C,$$

其中 $x<1$ 或 $x>3$.

【1957】 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos t\,dt$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$.

代入得 $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\tan t)}{(\sqrt{2}\tan t)^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C.$$

【1958】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

解 当 $x>1$ 时，设 $x=\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sec t\tan t dt$， $\sqrt{x^2-1}=\tan t$.

代入得 $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\sec t dt}{1+\sec^2 t}=\int \frac{\cos t}{\cos^2 t+1}dt=\int \frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

当 $x<-1$ 时，仍设 $x=\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$，经计算可获得同样的结果.

总之，当 $|x|>1$ 时，

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

【1959】 $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

解 设 $x=\tan t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 且 $|t|\neq\frac{\pi}{4}$，则 $dx=\sec^2 t dt$， $\sqrt{1+x^2}=\sec t$.

代入得 $$\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\sec^2 t dt}{(1-\tan^4 t)\sec t}=\int \frac{\cos^3 t dt}{1-2\sin^2 t}=\int \frac{1-\sin^2 t}{1-2\sin^2 t}d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1-2\sin^2 t}{1-2\sin^2 t}d(\sin t)+\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C \quad (|x|\neq 1).$$

【1960】 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

解 $$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int \left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}+\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+I_1.$$

对于 I_1，设 $x=\sqrt{2}\tan t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sqrt{2}\sec^2 t dt$， $\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\sec t$.

代入得 $$I_1=\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int \frac{\sec t dt}{1+2\tan^2 t}=\int \frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t}=\int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+C_1$$

$$=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)+C_1=-\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

于是，最后得到 $$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

化二次三项式为标准形式，计算下列积分：

【1961】 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 $$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}.$$

当 $x+\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t\tan t dt,\quad \sqrt{x^2+x-1}=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan t,\quad x^2+x+1=\frac{1}{4}(5\sec^2 t+3).$$

代入得 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=4\int\frac{\sec t\mathrm{d}t}{5\sec^2t+3}=4\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{5+3\cos^2t}=4\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{3}\sin t)}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{3}\sin t)^2}$$

$$=4\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\sin t}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

当 $x+\frac{1}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，仍设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$ 但限制 $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$. 经计算可获同样的结果.

总之，当 $\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

【1962】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

解 $$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}=\int\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}}\mathrm{d}x.$$

设 $x-1=\sqrt{3}\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{3}\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{2+2x-x^2}=\sqrt{3}\cos t$.

代入得 $$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}=\int\frac{1+2\sqrt{3}\sin t+3\sin^2t}{3(1+\sin^2t)}\mathrm{d}t$$

$$=\int\mathrm{d}t+\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\sin t}{1+\sin^2t}\mathrm{d}t-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2t}=t-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{2-\cos^2t}-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{1+2\tan^2t}$$

$$=t-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

【1963】 $\int\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 $$\int\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+x+1}}{}^{*)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C=\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

*） 利用 1781 题的结果.

【1964】+ 利用分式线性代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，计算积分：$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 分式线性代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 给出

$$x^2\pm x+1=\frac{(\beta^2\pm\beta+1)t^2+[2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2]t+(\alpha^2\pm\alpha+1)}{(1+t)^2}.$$

要求 $2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2=0$ 即化成标准形式，当 $\alpha+\beta=0$ 及$\alpha\beta=-1$时即得上式. 例如，取 $\alpha=-1$，$\beta=1$，

我们有 $x=\frac{t-1}{1+t}$ 或 $t=\frac{1+x}{1-x}$，$dx=\frac{2dt}{(1+t)^2}$，$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}$，$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1}$，

其中不妨设 $t+1>0$. 于是，

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}dt=2\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}+2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$$
$$=2(I_1+I_2).$$

对于 I_1，设 $u=\sqrt{1+3t^2}$，则 $\qquad du=\frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}}$，$t^2+3=\frac{u^2+8}{3}$.

代入 I_1，得

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=\int\frac{du}{u^2+8}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right)+C_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right)+C_1.$$

对于 I_2，设 $u=\frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$，则 $\qquad \frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{du}{3-u^2}$，$t^2+3=\frac{27-8u^2}{3(3-u^2)}$，

代入 I_2，得

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=3\int\frac{du}{27-8u^2}=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right|+C_2$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C_2=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}\right]+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C.$$

【1965】[+] 求 $\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

解 此题与1964题均属于下述类型的积分

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

（参看微积分学教程（Γ. M. 菲赫金哥尔茨）第二卷第一分册55页“272. 其他的计算方法”）

设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，适当选择 α 与 β，使得在两个三项式中同时消去一次项. 为此，将 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 分别代入 x^2+2及 $2x^2-2x+5$ 中，并令一次项的系数等于零，求得

$$\alpha=-1,\quad \beta=2,$$

即设 $x=\frac{2t-1}{1+t}$. 从而有

$$dx=\frac{3}{(t+1)^2}dt,\quad x^2+2=\frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2},\ \sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1>0$. 代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x-2x+5}}=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于右端的第一个积分，设 $u=\sqrt{t^2+1}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{2u^2-1}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}+C_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+C_1.$$

对于右端的第二个积分，设 $u=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{3}\arctan u+C_2=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}\right)+C_2$$

$$=-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C_3.$$

于是，最后得到 $$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C.$$

利用欧拉代换

(1) 若 $a>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$；　(2) 若 $c>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$；

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

求下列积分：

【1966】 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

提示 令 $\sqrt{x^2+x+1}=z-x$.

解 设 $\sqrt{x^2+x+1}=z-x$，则 $x=\frac{z^2-1}{1+2z}$，　$dx=\frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}dz$，$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}$.

代入得 $$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}dz=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)}+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+\frac{3}{2(2z+1)}+C,$$

其中 $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

【1967】 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

提示 令 $\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$.

解 设 $\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$，则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x},\quad x=\frac{2(z-1)}{z^2+1},dx=\frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}dz,\quad \sqrt{1-2x-x^2}+1=\frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得 $$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}dz=\int\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2+1}\right]dz$$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\arctan z+C,$$

其中 $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

【1968】 $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

解 设 $\sqrt{x^2-2x+2}=z-x$，则 $x=\frac{z^2-2}{2(z-1)}$，$dx=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2}dz$，$\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)}$.

代入得 $$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1][(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\left\{\left[(z-1)^2-(z-1)^{-4}\right]+\left[2(z-1)+2(z-1)^{-3}\right]+\left[1-(z-1)^{-2}\right]+4(z-1)^{-1}\right\}d(z-1)$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]+\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]+\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C,$$

其中　$z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$.

【1969】 $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

提示　令 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$.

解　设 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$，则 $x=\frac{2-z^2}{z^2-1}$，　$dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$，　$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{z}{z^2-1}$.

代入得

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$=\int\left[-\frac{17}{108(z+1)}+\frac{5}{18(z+1)^2}+\frac{1}{3(z+1)^3}+\frac{3}{4(z-1)}-\frac{16}{27(z-2)}\right]dz$$

$$=-\frac{17}{108}\ln|z+1|-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|+C,$$

其中　$z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

【1970】 $\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

解　设 $\sqrt{x(1+x)}=z+x$，则　$x=\frac{z^2}{1-2z}$，　$dx=\frac{2z(1-z)}{(1-2z)^2}dz$，$1+\sqrt{x(1+x)}=\frac{1-z-z^2}{1-2z}$.

代入得

$$\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}=2\int\frac{z(1-z)}{(1-z-z^2)^2}dz=2\int\frac{(1-z-z^2)+(2z+1)-2}{(1-z-z^2)^2}dz$$

$$=2\int\frac{dz}{1-z-z^2}-2\int\frac{d(1-z-z^2)}{(1-z-z^2)^2}-4\int\frac{dz}{(1-z-z^2)^2}$$

$$=2\int\frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{1-z-z^2}-4\left\{\frac{2z+1}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5}\int\frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}{}^{*)}\right\}$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z-\frac{1}{2}}\right|+\frac{2}{1-z-z^2}-\frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)}+C=\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2z+1}{\sqrt{5}-2z-1}\right|+\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+C,$$

其中　$z=\sqrt{x(1+x)}-x$.

*)利用 1921 题的递推公式.

利用不同方法，计算下列积分：

【1971】 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解　$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)-(x^2-1)}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

【1972】 $\int\frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

提示　令 $\frac{1+x}{1-x}=z$，并利用 1884 题的结果.

解　设$\frac{1+x}{1-x}=z$，则　$x=\frac{z-1}{z+1}$，　$dx=\frac{2}{(z+1)^2}dz$.

代入得 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{(z^2-1)\mathrm{d}z}{\sqrt{z}(3z^2+1)}=\int\frac{(z^2-1)\mathrm{d}(\sqrt{z})}{3z^2+1}=\int\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3z^2+1)}\right]\mathrm{d}(\sqrt{z})$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{3z^2})}{(\sqrt[4]{3z^2})^4+1}=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{4}{3\sqrt[4]{3}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{1-z\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left[\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)\right]+C,$$

其中 $z=\frac{1+x}{1-x}$.

*)利用 1884 题的结果.

【1973】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\int\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+C.$$

【1974】 $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x+\sqrt{1+x+x^2})(1+x-\sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2-(1+x+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\mathrm{d}x-\ln|x|.$$

对于积分 $\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\mathrm{d}x$，设 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$， $\sqrt{1+x+x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}$.

不妨设 $t>0$，代入得

$$\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2}\mathrm{d}t=\int\sqrt{t^2+t+1}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t\sqrt{1+t+t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt{x^2+x+1}-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+t^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t+t^2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)+1}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2}+C_1$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+\ln x+C.$$

于是，当 $x>0$ 时，最后得到

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C.$$

当 $x<0$ 时，可获得同样的结果.

【1975】 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

解 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{\sqrt{x(x+1)}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}dx=\int [(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]dx$

$=\int [x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}]dx=\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]+C.$

【1976】 $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

解 $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}}=\int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}}.$

下面我们先考虑积分 $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$. 设 $x=\tan t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则有 $dx=\sec^2 t dt$. 代入得

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{\tan^2 t-1}{\sec^4 t}\sec^2 t dt=\int (\sin^2 t-\cos^2 t)dt=-\int \cos 2t dt=-\frac{1}{2}\sin 2t+C_1=-\frac{x}{1+x^2}+C_1,$$

从而,可得 $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)$. 于是,

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)+C.$$

【1977】 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx$.

解 仿照 1976 题,可得

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx=\int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C.$$

【1978】 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

提示 令 $\frac{1}{x}=\sqrt{t}$ (这里设 $x>0$. 若 $x<0$,则令 $\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$,最后结果相同).

解 作代换 $\frac{1}{x}=\sqrt{t}$ (这里设 $x>0$. 若 $x<0$,则作变换 $\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$,最后结果相同),则

$$dx=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}dt,\quad \sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}$$

代入得 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+C$

$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C\quad (|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}).$

【1979】 $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解 $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}=\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}}+C.$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(1+2x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2+x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C.$$

【1980】 证明:积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x\ (R\ 为有理函数)$$

的求法,归结为有理函数的积分法.

证明思路 当 a,c 中至少有一个为零时,则积分的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a\neq0$ 及 $c\neq0$ 时,设 $\sqrt{ax+b}=z$,则 $\sqrt{cx+d}=\sqrt{c_1z^2+d_1}$,其中 $c_1=\frac{c}{a}$, $d_1=d-\frac{bc}{a}$. 从而,原积分变形为

$$\int R\left(\frac{z^2-b}{a},z,\sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}z\mathrm{d}z=\int R_1(z,\sqrt{c_1z^2+d_1})\mathrm{d}z,$$

其中 R_1 为有理函数.

若 $c_1>0$,设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}z+u$;若 $d_1>0$,设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}$,即可将被积函数有理化. 从而命题获证.

证 当 a,c 中至少有一个为零时,则积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a\neq0,c\neq0$ 时,设 $\sqrt{ax+b}=z$,则

$$x=\frac{z^2-b}{a},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{a}z\mathrm{d}z,\ \sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}z^2+d-\frac{bc}{a}}=\sqrt{c_1z^2+d_1},$$

式中 $c_1=\frac{c}{a}$, $d_1=d-\frac{bc}{a}$. 代入得

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{z^2-b}{a},z,\sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}z\mathrm{d}z=\int R_1(z,\sqrt{c_1z^2+d_1})\mathrm{d}z,$$

其中 R_1 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}z+u\ (c_1>0)$ 或 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}\ (d_1>0)$——欧拉代换,就可将被积函数有理化. 于是,积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+b})\mathrm{d}x$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式的积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x,\quad (式中\ m,n\ 和\ p\ 为有理数)$$

仅在下列三种情形可化为有理函数的积分(切比雪夫定理):

第一种情形,p 为整数. 此时令 $x=z^N$,其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形,$\frac{m+1}{n}$ 为整数. 此时令 $a+bx^n=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形,$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数. 此时利用代换:$ax^{-n}+b=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n=1$,则这些情形等价于:(1) p 为整数. (2) m 为整数. (3) $m+p$ 为整数.

计算下列积分：

【1981】 $\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

提示 令 $x^{-1}+1=z^2$.

解 $\sqrt{x^3+x^4}=x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$. $m=\frac{3}{2}$，$n=1$，$p=\frac{1}{2}$；$\frac{m+1}{n}+p=3$，这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-1}+1=z^2$，则 $x=\frac{1}{z^2-1}$，$dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$，$\sqrt{x^3+x^4}=\frac{z}{(z^2-1)^2}$

（不妨设 $z>0$，以下各题不再说明）. 代入得

$$\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx=-2\int\frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz=-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^4}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=-2\left[-\frac{z}{6(z^2-1)^3}-\frac{5}{6}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\right]^{*)}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}=\frac{z}{3(z^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=\frac{z}{3(z^2-1)^3}+\frac{z}{12(z^2-1)^2}-\frac{z}{8(z^2-1)}+\frac{1}{16}\ln\frac{z+1}{z-1}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C\quad(x>0).$$

*）利用 1921 题的结果.

【1982】 $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

提示 令 $x=z^6$.

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$. $m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{3}$，$p=-2$；p 为整数，这是二项微分式的第一种情形.

设 $x=z^6$，则 $dx=6z^5dz$，$\sqrt{x}=z^3$，$\sqrt[3]{x}=z^2$. 代入得

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx=6\int\frac{z^8}{(z^2+1)^2}\,dz=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]dz$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\arctan z+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan z\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\arctan(x^{\frac{1}{6}})+C.$$

*）利用 1921 题的结果.

【1983】 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

提示 令 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$. $m=1$，$n=\frac{2}{3}$，$p=-\frac{1}{2}$；$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$，则 $x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$，$dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$. 代入得

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(z^2-1)^2dz=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

【1984】 $\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. $m=5$，$n=2$，$p=-\frac{1}{2}$；$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形.

设 $\sqrt{1-x^2}=z$（不妨设 $x>0$），则 $x=\sqrt{1-z^2}$， $dx=-\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz$. 代入得

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int(1-z^2)^2dz=-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C,$$

其中 $z=\sqrt{1-x^2}$.

【1985】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

提示 令 $x^{-3}+1=z^3$.

解 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$，$m=0$，$n=3$，$p=-\dfrac{1}{3}$；$\dfrac{m+1}{n}+p=0$，这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3}+1=z^3$，则 $x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}}$， $dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz$. 代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\frac{z}{z^3-1}dz=-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{1}{3}\int\frac{z-1}{z^2+z+1}dz$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

【1986】 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

解 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$，$m=0$，$n=4$，$p=-\dfrac{1}{4}$；$\dfrac{m+1}{n}+p=0$，这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-4}+1=z^4$，则 $z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$ $(z>0,\ x>0)$，$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}}$， $dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz$. 代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2}{z^4-1}dz=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan z+C,$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

【1987】+ $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

解 $\dfrac{1}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}$. $m=-1$，$n=6$，$p=-\dfrac{1}{6}$；$\dfrac{m+1}{n}=0$，这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^6=z^6$，则 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$ $(z>0,x>0)$，$x=\sqrt[6]{z^6-1}$， $dx=z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz$. 代入得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=\int\frac{z^4dz}{z^6-1}=\int\left[-\frac{1}{6(z+1)}+\frac{z+1}{6(z^2-z+1)}+\frac{1}{6(z-1)}+\frac{-z+1}{6(z^2+z+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$.

【1988】 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

解 $\dfrac{1}{x^3\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}}=x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}$. $m=-3$, $n=-1$, $p=-\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{m+1}{n}=2$,这是二项微分式的第二种情形. 设 $1+x^{-1}=z^5$,则 $x=(z^5-1)^{-1}$, $dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz$. 代入得

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=-5\int z^3(z^5-1)dz=-\frac{5}{9}z^9+\frac{5}{4}z^4+C,$$

其中 $z=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}$.

【1989】 $\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

解 $\sqrt[3]{3x-x^3}=x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}$. $m=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $p=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{m+1}{n}+p=1$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $3x^{-2}-1=z^3$(不妨设 $x>0$),则

$$z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x},\quad x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{z^3+1}},\quad dx=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{\frac{3}{2}}}dz.$$

代入得

$$\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz=-\frac{9}{2}\int\frac{dz}{z^3+1}+\frac{9}{2}\int\frac{dz}{(z^3+1)^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+\frac{9}{2}\left[\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{**)}+C=\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

**) 利用 1892 题的结果.

【1990】 在什么情形下,积分 $\int\sqrt{1+x^m}\,dx$ (m 为有理数)为初等函数?

解 $\sqrt{1+x^m}=x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p=\dfrac{1}{2}$,故由切比雪夫定理知,仅在下述两种情形,此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形,$\dfrac{1}{m}$为整数,即 $m=\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{2}{2k_1}$,其中 $k_1=\pm1,\pm2,\cdots$.

第二种情形,$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2}$为整数,即 $m=\dfrac{2}{2k_2-1}$,其中 $k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

综上所述,即得:当 $m=\dfrac{2}{k}$ (式中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$)时,积分 $\int\sqrt{1+x^m}\,dx$ 为初等函数.

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx\quad(m\text{ 及 }n\text{ 为整数})$$

的积分,可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分:

【1991】 $\int\cos^5 x\,dx$.

解 $\int\cos^5 x\mathrm{d}x=\int\cos^4 x\cos x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x)$

$=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\mathrm{d}(\sin x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$

【1992】 $\int\sin^6 x\mathrm{d}x.$

解 $\int\sin^6 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int(1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x)\mathrm{d}x$

$=\frac{x}{8}-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{8}\int(1-\sin^2 2x)\cos 2x\mathrm{d}x$

$=\frac{x}{8}-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3x}{16}+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)\mathrm{d}(\sin 2x)$

$=\frac{5x}{16}-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$

$=\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

【1993】 $\int\cos^6 x\mathrm{d}x.$

解 $\int\cos^6 x\mathrm{d}x=\int\sin^6\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{5}{16}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{64}\sin 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{48}\sin^3 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{*)}+C_1$

$=\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

*） 利用 1992 题的结果.

【1994】 $\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x.$

解 $\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\mathrm{d}(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

【1995】 $\int\sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x.$

解 $\int\sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x=\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C.$

【1996】 $\int\sin^5 x\cos^5 x\mathrm{d}x.$

解 $\int\sin^5 x\cos^5 x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{32}\sin^5 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{64}\int(1-\cos^2 2x)^2\mathrm{d}(\cos 2x)$

$=-\frac{1}{64}\cos 2x+\frac{1}{96}\cos^3 2x-\frac{1}{320}\cos^5 2x+C.$

【1997】 $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}(\cos x)=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$

【1998】 $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}(\sin x)=-\frac{1}{2}\int\cos^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{\cos^2 x\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x+C$$

【1999】 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int\frac{1}{\sin x}d(\cot x)=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int\cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\sin^3 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,$$

于是，$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【2000】 $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|^{*)}+C$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

*）利用 1999 题的结果.

【2001】 $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int\frac{dx}{\sin^4 2x}=-8\int\csc^2 2x\,d(\cot 2x)$

$$=-8\int(1+\cot^2 2x)d(\cot 2x)=-8\cot 2x-\frac{8}{3}\cot^3 2x+C.$$

【2002】 $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

提示： 多次利用等式 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x}dx=\int\frac{dx}{\sin x\cos^5 x}+\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$

$$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^5 x}dx+\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx+2\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}+\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^5 x}+2\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx+3\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}-2\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+3\int\frac{d(\tan x)}{\tan x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}=\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+3\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{3}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\cot^2 x+3\ln|\tan x|+C.$$

【2003】 $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

提示： 与 2002 题相同.

解 $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{3\cos^3 x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【2004】 $\int\tan^5 x\,dx$.

解 $\int\tan^5 x\,dx=\int\tan x(\sec^2 x-1)^2 dx=\int\sec^4 x\tan x\,dx-2\int\sec^2 x\tan x\,dx+\int\tan x\,dx$

$$=\int \sec^3 x\mathrm{d}(\sec x)-2\int \sec x\mathrm{d}(\sec x)-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=\frac{1}{4}\sec^4 x-\sec^2 x-\ln|\cos x|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

【2005】 $\int \cot^6 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \cot^6 x\mathrm{d}x=\int \cot^2 x(\csc^2 x-1)^2\mathrm{d}x=\int \cot^2 x\csc^4 x\mathrm{d}x-2\int \cot^2 x\csc^2 x\mathrm{d}x+\int \cot^2 x\mathrm{d}x$

$$=-\int \cot^2 x(1+\cot^2 x)\mathrm{d}(\cot x)+2\int \cot^2 x\mathrm{d}(\cot x)+\int (\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\frac{1}{5}\cot^5 x+\frac{2}{3}\cot^3 x-\cot x-x+C=-\frac{1}{5}\cot^5 x+\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x-x+C.$$

【2006】 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x=\int \tan^4 x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$

【2007】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}=\int \frac{\sin^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}+\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}=\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}(\tan x)-\int \frac{\mathrm{d}(\cot x)}{\sqrt{\cot x}}$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}-2\sqrt{\cot x}+C.$$

【2008】$^+$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

解 设 $t=\sqrt[3]{\sin x}$，不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况，即 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq 0$，则有

$$\mathrm{d}x=\frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}}\mathrm{d}t,\qquad \cos x=\sqrt{1-t^6}.$$

代入得 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}=3\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6}=\frac{3}{2}\int \left(\frac{1}{1-t^3}+\frac{1}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^3}$

$$=-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{4}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t+\frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[3]{\sin x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

【2009】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}.$

解 设 $t=\sqrt{\tan x}$，则 $x=\arctan t^2$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^4}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}=2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=2\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C.$$

其中　$t=\sqrt{\tan x}$.

*）利用 1884 题的结果.

【2010】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\tan x}}$.

解　设 $\sqrt[3]{\tan x}=t$,则 $x=\arctan t^3$，$\mathrm{d}x=\frac{3t^2}{1+t^6}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\tan x}}=3\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^6}=\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+(t^2)^3}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C,$$

其中　$t=\sqrt[3]{\tan x}$.

*）利用 1881 题的结果.

【2011】 推出下列积分的递推公式.

(1) $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x$；　(2) $K_n=\int \cos^n x\mathrm{d}x$　$(n>2)$.

利用这些公式计算　　$\int \sin^6 x\mathrm{d}x$　和　$\int \cos^8 x\mathrm{d}x$.

提示　利用分部积分法，易得：

(1) $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$；　(2) $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$.

解　(1)　$I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x=-\int \sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \cos^2 x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\mathrm{d}x=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n,$$

于是，
$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_0=\int \mathrm{d}x=x+C$，即得

$$I_6=\int \sin^6 x\mathrm{d}x=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}I_4=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{8}I_2$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}x+C.$$

(2) $K_n=\int \cos^n x\mathrm{d}x=\int \cos^{n-1}x\mathrm{d}(\sin x)$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int \sin^2 x\cos^{n-2}x\mathrm{d}x=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)K_{n-2}-(n-1)K_n,$$

于是，
$$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2};$$

利用此公式及 $K_0=x+C$，即得

$$K_8=\int \cos^8 x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{8}K_6=\cdots$$

$$=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C.$$

【2012】 推出下列积分的递推公式：

(1) $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$；　(2) $K_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$　$(n>2)$.

利用这些公式计算　　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}$　和　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}$.

提示 利用分部积分法及 $1=\sin^2x+\cos^2x$，易得

(1) $I_n=-\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$； (2) $K_n=\dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}K_{n-2}$.

解 (1) $I_n=\int\dfrac{dx}{\sin^n x}=\int\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^n x}dx=I_{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\int\cos x\, d\left(\dfrac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$

$=I_{n-2}-\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\dfrac{1}{n-1}I_{n-2}=-\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$；

利用此公式及 $I_1=\int\dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$，即得

$$I_5=\int\frac{dx}{\sin^5x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4x}+\frac{3}{4}I_3=\cdots=-\frac{\cos x}{4\sin^4x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2) $K_n=\int\dfrac{dx}{\cos^n x}=\int\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^n x}dx=\dfrac{1}{n-1}\int\sin x\, d\left(\dfrac{1}{\cos^{n-1}x}\right)+K_{n-2}$

$=\dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\dfrac{1}{n-1}K_{n-2}+K_{n-2}=\dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}K_{n-2}$；

利用此公式及 $K_1=\int\dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$，即得

$$K_7=\int\frac{dx}{\cos^7x}=\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5}{6}K_5=\cdots=\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2x}+\frac{5}{16}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

为了计算下面的积分，可以运用公式

Ⅰ. $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$；

Ⅱ. $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；

Ⅲ. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

求积分：

【2013】 $\int\sin5x\cos x\,dx$.

解 $\int\sin5x\cos x\,dx=\dfrac{1}{2}\int[\sin4x+\sin6x]dx=-\dfrac{1}{8}\cos4x-\dfrac{1}{12}\cos6x+C$.

【2014】 $\int\cos x\cos2x\cos3x\,dx$.

解 $\int\cos x\cos2x\cos3x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\cos2x(\cos4x+\cos2x)dx=\dfrac{1}{4}\int(\cos6x+\cos2x)dx+\dfrac{1}{4}\int(1+\cos4x)dx$

$=\dfrac{1}{24}\sin6x+\dfrac{1}{8}\sin2x+\dfrac{1}{16}\sin4x+\dfrac{x}{4}+C$.

【2015】 $\int\sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{3}dx$.

解 $\int\sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{3}dx=\dfrac{1}{2}\int\left(\cos\dfrac{2}{3}x-\cos\dfrac{4}{3}x\right)\sin\dfrac{x}{2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int\cos\dfrac{2}{3}x\sin\dfrac{x}{2}dx-\dfrac{1}{2}\int\cos\dfrac{4}{3}x\sin\dfrac{x}{2}dx$

$=\dfrac{1}{4}\int\left(\sin\dfrac{7}{6}x-\sin\dfrac{1}{6}x\right)dx-\dfrac{1}{4}\int\left(\sin\dfrac{11}{6}x-\sin\dfrac{5}{6}x\right)dx$

$=-\dfrac{3}{14}\cos\dfrac{7}{6}x+\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{x}{6}+\dfrac{3}{22}\cos\dfrac{11}{6}x-\dfrac{3}{10}\cos\dfrac{5}{6}x+C$.

【2016】 $\int\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$.

解 $\int\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx=\dfrac{1}{2}\int\sin x[\cos(a-b)-\cos(2x+a+b)]dx$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)-\frac{1}{4}\int[\sin(3x+a+b)-\sin(x+a+b)]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+C.$$

【2017】 $\int\cos^2 ax\cos^2 bx\mathrm{d}x$.

解 $\int\cos^2 ax\cos^2 bx\mathrm{d}x=\int(\cos ax\cos bx)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int[\cos^2(a-b)x+\cos^2(a+b)x+2\cos(a-b)x\cos(a+b)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int[2+\cos2(a+b)x+\cos2(a-b)x]\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int(\cos2ax+\cos2bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin2(a+b)x}{16(a+b)}+\frac{\sin2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{1}{8a}\sin2ax+\frac{1}{8b}\sin2bx+C.$$

【2018】 $\int\sin^3 2x\cos^2 3x\mathrm{d}x$.

解 先利用三角公式化简 $\sin^3 2x\cos^2 3x\mathrm{d}x$，得

$$\sin^3 2x\cos^2 3x=-\frac{1}{16}\sin12x+\frac{3}{16}\sin8x-\frac{1}{8}\sin6x-\frac{3}{16}\sin4x+\frac{3}{8}\sin2x.$$

于是，
$$\int\sin^3 2x\cos^2 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{192}\cos12x-\frac{3}{128}\cos8x+\frac{1}{48}\cos6x+\frac{3}{64}\cos4x-\frac{3}{16}\cos2x+C.$$

为了计算下面的积分，可以运用恒等式：

$$\sin(\alpha-\beta)\equiv\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)],\quad \cos(\alpha-\beta)\equiv\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)].$$

求积分：

【2019】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C,$$

其中 $\sin(a-b)\neq0$.

【2020】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C.$$

其中 $\cos(a-b)\neq0$.

【2021】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}-\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C,$$

其中 $\sin(a-b)\neq0$ *).

*） 当 $a-b=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，是更简单的积分，2019 题及 2020 题与本题类似，解法从略.

【2022】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\sin a}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\sin x-\sin a}\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}+\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中　$\cos a\neq0$.

【2023】　$\int\frac{dx}{\cos x+\cos a}$.

解　$$\int\frac{dx}{\cos x+\cos a}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a-\pi}{2}}{\cos\frac{x+a+2\pi}{2}}\right|^{*)}+C=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中　$\sin a\neq0$.

*）利用 2022 题的结果.

【2024】　$\int\tan x\tan(x+a)dx$.

解　$$\int\tan x\tan(x+a)dx=\int\frac{\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx$$

$$=\int\frac{\cos x\cos(x+a)+\sin x\sin(x+a)-\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx=\int\frac{\cos a-\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx$$

$$=-x+\cos a\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos x}=-x+\cot a\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|^{*)}+C,$$

其中　$\sin a\neq0$.

*）利用 2021 题的结果.

形如

$$\int R(\sin x,\cos x)dx\ (R\text{ 为有理函数})$$

的积分在一般情形下可利用代换 $\tan\frac{x}{2}=t$ 化为有理函数的积分.

(1) 若等式

$$R(-\sin x,\cos x)\equiv-R(\sin x,\cos x)\quad\text{或}\quad R(\sin x,-\cos x)\equiv-R(\sin x,\cos x)$$

成立,则最好利用相应的代换 $\cos x=t$ 或 $\sin x=t$.

(2) 若等式 $R(-\sin x,-\cos x)\equiv R(\sin x,\cos x)$ 成立,则最好利用代换 $\tan x=t$.

求积分:

【2025】　$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

解　设 $t=\tan\frac{x}{2}$,则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. 代入得

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}=\frac{1}{\sqrt5}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt5}\right)+C=\frac{1}{\sqrt5}\arctan\left[\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt5}\right]+C.$$

【2026】　$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解　设 $t=\tan\frac{x}{2}$,同 2025 题,得

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt=\int\left[\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right]dt=\frac{1}{3}\ln|t(3+t^2)|+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}{}^{*)}+C.$$

*) 由于 $t(3+t^2)=\tan\frac{x}{2}\left(2+\sec^2\frac{x}{2}\right)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)$

$$=\frac{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}(\cos x+2)=2\left[\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

因而，$\ln|t(3+t^2)|=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$.

【2027】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$.

解 设 $\tan\frac{x}{2}=t$，同 2025 题，得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx=4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}=\frac{4}{5}\int\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{-2+t}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t-t^2}\right]dt$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{8}{5}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{5}\int\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}+\frac{4}{5}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{5}\arctan t-\frac{8}{5}\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\arctan t\right]^{*)}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right|+C_1$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)^{**)}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right|^{***)}+C.$$

*) 利用 1817 题的结果.

**) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}=-\frac{2}{5}\cdot\dfrac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=-\frac{2}{5}\cdot\dfrac{1+2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\frac{2}{1+\cos x}}=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)-\frac{1}{5}.$

***) $\ln\left|\dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|=\ln\left|\dfrac{\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}}{\cot\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)-\tan\frac{x}{2}}\right|$

$$=\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)\tan\frac{x}{2}}\right|+\ln\frac{1}{\cot\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)}$$

$$=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right|-\ln\left[\cot\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)\right].$$

【2028】 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$，(1) $0<\varepsilon<1$；(2) $\varepsilon>1$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，同 2025 题，得 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I.$

(1) $0<\varepsilon<1$，

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C;$$

(2) $\varepsilon>1$,

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{dt}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\,t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\,t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|^{*)}+C.$$

*) $\dfrac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}=\dfrac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}=\dfrac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1+t^2)\cos x+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1+t^2)\cos x+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\cos x+1}=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\varepsilon\cos x+1}.$$

【2029】 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$

解 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)dx=x-\int\frac{d(\tan x)}{\sec^2 x+\tan^2 x}=x-\int\frac{d(\tan x)}{1+2\tan^2 x}$

$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C.$$

【2030】 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}.$

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{d(\tan x)}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+C,$

其中 $ab\neq0$.

【2031】 $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}.$

解 $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(a\tan x)}{(a^2\tan^2 x+b^2)^2}=\frac{\tan x}{2b^2(a^2\tan^2 x+b^2)}+\frac{1}{2ab^3}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)^{*)}+C,$

其中 $ab\neq0$.

*) 利用 1921 题的结果.

【2032】 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$

解 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

【2033】 $\displaystyle\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}.$

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(a\tan x+b)}{(a\tan x+b)^2}=-\frac{1}{a\tan x+b}+C=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C.$

【2034】 $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}.$

解 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int \frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{3}\int \frac{-(\cos x-\sin x)dx}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{6}\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$

$=-\frac{1}{3}\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{6}\int \frac{d(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{2}\int \frac{d(\cot x)}{\left(\cot x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$=-\frac{1}{6}\ln \frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)+C.$

【2035】 $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int \frac{2dx}{2-\sin^2 2x}=\int \frac{d(\tan 2x)}{2\sec^2 2x-\tan^2 2x}=\int \frac{d(\tan 2x)}{2+\tan^2 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

【2036】 $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$.

解 $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx=\int \frac{2\sin^2 2x dx}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8}=\int \frac{\tan^2 2x d(\tan 2x)}{\tan^4 2x-8\tan^2 2x\sec^2 2x+8\sec^4 2x}$

$=\int \frac{\tan^2 2x d(\tan 2x)}{\tan^4 2x+8\tan^2 2x+8}=\frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})\int \frac{d(\tan 2x)}{\tan^2 2x+4+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})\int \frac{d(\tan 2x)}{\tan^2 2x+4-2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)-\sqrt{2-\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\right]+C.$

【2037】 $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

解 $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=-\int \frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)dx$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C.$

【2038】 $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

解 $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\int \frac{\tan x\sec^2 x}{\sec^4 x+\tan^4 x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(\tan^2 x)}{2\tan^4 x+2\tan^2 x+1}=\frac{1}{2}\arctan(1+2\tan^2 x)+C.$

【2039】 $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int \frac{dx}{1-3\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{dx}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}=\int \frac{2d(\tan 2x)}{4\sec^2 2x-3\tan^2 2x}=\arctan\left(\frac{\tan 2x}{2}\right)+C.$

【2040】 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}=\int \frac{\frac{1}{\cos^4 x}dx}{(\tan^2 x+2)^2}=\int \frac{\sec^2 x d(\tan x)}{(\tan^2 x+2)^2}$

$=\int \frac{\tan^2 x}{(\tan^2 x+2)^2}d(\tan x)+\int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x+2)^2}=\int \frac{(\tan^2 x+2)-2}{(\tan^2 x+2)^2}d(\tan x)+\int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x+2)^2}$

$=\int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+2}-\int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x+2)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\tan x}{4(\tan^2 x+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}+C$

$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\tan x}{4(\tan^2 x+2)}+C.$

*）利用 1817 题的结果.

【2041】 把分母化为对数的形式，求积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\varphi)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x+\varphi}{2}\right)\right|+C$,

式中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2\neq0$.

【2042】 证明：$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C$，式中 A,B,C 为常数.

提示 首先，a 及 b 不可能同时为零. 其次，令

$$a_1\sin x+b_1\cos x\equiv A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$$

比较等式两端同类项的系数，可得 A,B:

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\quad(a^2+b^2\neq0),$$

并注意 $(a\cos x-b\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)$，命题即易获证.

证 设 $a_1\sin x+b_1\cos x\equiv A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$,

比较等式两端同类项的系数，可得 $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$, $a^2+b^2\neq0$. 于是，

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=A\int\mathrm{d}x+B\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

求积分：

【2043】 $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$.

解 此为 2042 题的特例，这里 $a_1=1$, $b_1=-1$, $a=1$, $b=2$;

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-2}{1+4}=-\frac{1}{5},B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{-1-2}{1+4}=-\frac{3}{5}.$$

代入得 $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$.

【2044】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+5\tan x}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+5\tan x}=\int\frac{\cos x}{5\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$. 此为 2042 题的特例，这里

$$a_1=0,\quad b_1=1,\quad a=5,\quad b=3;A=\frac{3}{34},\quad B=\frac{5}{34}.$$

代入得 $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+5\tan x}=\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|+C$.

【2045】 $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

提示 仿 2042 题，并利用 2041 题的结果.

解 仿 2042 题，有

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x=A\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=A\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x+B\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|^{*)}-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|-\frac{ab_1-a_1b}{(a^2+b^2)(a\sin x+b\cos x)}+C,$$

式中 $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2\neq0$

(显然按题意 a,b 不同时为零).

*) 利用 2041 题的结果.

【2046】 证明:

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c},$$

式中 A,B,C 为常数.

提示 首先,a 及 b 不可能同时为零.其次,令

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,可得 A,B,C:

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},\ C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}\quad(a^2+b^2\neq0),$$

并注意 $(a\cos x-b\sin x)dx=d(a\sin x+b\cos x+c)$,命题即易获证.

证 按题意 a、b 不同时为零.设

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

代入得 $$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

求积分:

【2047】 $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx.$

解 此为 2046 题的特例,这里

$a_1=1,\ b_1=2,\ c_1=-3,\ a=1,\ b=-2,\ c=3;$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5},\qquad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{2+2}{1+4}=\frac{4}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}=\frac{(-3-3)+(-2)(6-6)}{1+4}=-\frac{6}{5}.$$

代入得 $$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\arctan\frac{1+5\tan\frac{x}{2}}{2}{}^{*)}+C.$$

*) 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,积分即得所求式子.

【2048】 $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}.$

解 此为 2046 题的特例,这里

$$a_1=1,\ b_1=0,\ c_1=0,\ a=1,\ b=1,\ c=\sqrt{2};A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

代入得 $$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right|-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

【2049】 $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx.$

解 本题也是 2046 题的特例，这里

$$a_1=2,\ b_1=1,\ c_1=0,\ a=3,\ b=4,\ c=-2;\quad A=\frac{2}{5},\quad B=-\frac{1}{5},\quad C=\frac{4}{5}.$$

代入得 $$\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}\right|^{*)}+C.$$

*) 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，积分即得所求式子.

【2050】 证明：

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

式中 A,B,C 为常数.

提示 首先，a 及 b 不可能同时为零. 其次，令

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x\equiv A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数，可得 A,B,C：

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},\ C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}\quad(a^2+b^2\neq0),$$

命题即易获证.

证 按题意 a、b 不同时为零. 设

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x\equiv A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$aA-bB=2b_1,\quad C-aB=a_1,\quad C+bA=c_1,$$

从而， $$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int\cos x dx-B\int\sin x dx+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}.$$

求积分：

【2051】 $\int\frac{\sin^2x-4\sin x\cos x+3\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx.$

解 此为 2050 题的特例，这里

$$a_1=1,\ b_1=-2,\ c_1=3,\ a=1,\ b=1;$$

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1-4}{1+1}=-1,B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1+4}{1+1}=3,C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}=\frac{1+3+4}{1+1}=4.$$

代入得 $$\int\frac{\sin^2x-4\sin x\cos x+3\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx=-\sin x+3\cos x+4\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

$$=-\sin x+3\cos x+\frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

【2052】 $\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$.

解 本题也是 2050 题的特例，这里

$$a_1=1,\ b_1=-\frac{1}{2},\ c_1=2,\ a=1,\ b=2;A=\frac{1}{5},\quad B=\frac{3}{5},\quad C=\frac{8}{5}.$$

代入得 $$\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x}=\frac{1}{5}(\sin+3\cos x)+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\tan\frac{x}{2}+1}\right|^{*)}+C.$$

*） 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，积分即得所求式子.

【2053】 证明：若 $(a-c)^2+b^2\neq0$，则

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}\mathrm{d}x=A\int\frac{\mathrm{d}u_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{\mathrm{d}u_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中 A,B 为待定系数，λ_1,λ_2 为方程 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0\quad(\lambda_1\neq\lambda_2)$

的根，而 $$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x,\quad k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}\quad(i=1,2).$$

证 记

$$a^2\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x=(a-\lambda_i)\sin^2x+2b\sin x\cos x+(c-\lambda_i)\cos^2x+\lambda_i$$

$$=\frac{1}{a-\lambda_i}[(a-\lambda_i)^2\sin^2x+2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x+(c-\lambda_i)(a-\lambda_i)\cos^2x]+\lambda_i,$$

其中 $\lambda_i(i=1,2)$ 为方程 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0$ 的根.

由假定 $(a-c)^2+b^2\neq0$，从而，$(a-c)^2+4b^2\neq0$，因此 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 再设 $k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}$ $(i=1,2)$ 及 $u_i=(a-\lambda_i)\cdot\sin x+b\cos x$. 由于 $(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)-b^2=0$，即 $b^2=(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)$. 于是，

$$a^2\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x=k_i[(a-\lambda_i)^2\sin^2x+2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x+b^2\cos^2x]+\lambda_i$$

$$=k_i[(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_i=k_iu_i^2+\lambda_i. \tag{1}$$

其次，设

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A[(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x]+B[(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x], \tag{2}$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$-b(A+B)=a_1,\quad A(a-\lambda_1)+B(a-\lambda_2)=b_1,$$

$$A=-\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2)+bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)},\quad B=\frac{bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}^{*)}.$$

由(1)式及(2)式即得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a^2\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$=A\int\frac{(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x}{k_1[(a-\lambda_1)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_1}\mathrm{d}x+B\int\frac{(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x}{k_2[(a-\lambda_2)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_2}\mathrm{d}x$$

$$=A\int\frac{\mathrm{d}u_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{\mathrm{d}u_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}.$$

*） 按题意，$b\neq0$. 因若 $b=0$，则 $\lambda_1=a,\lambda_2=c$，从而，k_1 无意义. 不过，当 $b=0$ 时，仍能化为所要求的类似形式. 事实上，当 $b=0$ 时，$a\neq c$，我们有

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}dx=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+c\cos^2x}dx$$

$$=a_1\int\frac{\sin x}{a\sin^2x+c\cos^2x}dx+b_1\int\frac{\cos x}{a\sin^2x+c\cos^2x}dx=-a_1\int\frac{d(\cos x)}{(c-a)\cos^2x+a}+b_1\int\frac{d(\sin x)}{(a-c)\sin^2x+c}$$

$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中 $A=-a_1$, $B=b_1$, $k_1=c-a$, $k_2=a-c$, $u_1=\cos x$, $u_2=\sin x$, $\lambda_1=a$, $\lambda_2=c$.

本题也可用下法另证：命 $u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x$, $k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}(i=1,2)$，代入积分等式. 然后两边求导，整理并比较系数，便可知 λ_i 必为方程 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0$ 的根，相应可求出系数 A,B.

求积分：

【2054】 $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx.$

解 $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx=\int\frac{2\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx-\int\frac{\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx$

$$=-2\int\frac{d(\cos x)}{3+\cos^2x}-\int\frac{d(\sin x)}{4-\sin^2x}=-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt3}\right)-\frac14\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C.$$

【2055】 $\int\frac{\sin x+\cos x}{2\sin^2x-4\sin x\cos x+5\cos^2x}dx.$

解 此为 2053 题的特例，这里 $a_1=1$, $b_1=1$, $a=2$, $b=-2$, $c=5$. 由 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0$，求得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$，从而，

$$A=-\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2)+b_1b+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}=-\frac{(1-6)-2+(2-1)}{-2(1-6)}=\frac35,$$

$$B=\frac{bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{-2+1}{10}=-\frac{1}{10};$$

$u_1=(a-\lambda_1)\sin x+b\cos x=\sin x-2\cos x$, $u_2=(a-\lambda_2)\sin x+b\cos x=-4\sin x-2\cos x$;

$k_1=\frac{1}{a-\lambda_1}=1$, $k_2=\frac{1}{a-\lambda_2}=-\frac14$.

代入得 $$\int\frac{\sin x+\cos x}{2\sin^2x-4\sin x\cos x+5\cos^2x}dx=\frac35\int\frac{d(\sin x-2\cos x)}{(\sin x-2\cos x)^2+1}+\frac{1}{10}\int\frac{d(4\sin x+2\cos x)}{6-\frac14(4\sin x+2\cos x)^2}$$

$$=\frac35\arctan(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt6+2\sin x+\cos x}{\sqrt6-2\sin x-\cos x}\right|+C.$$

【2056】 $\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx.$

解 本题也是 2053 题的特例，且

$$\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx=\int\frac{\sin x-2\cos x}{\sin^2x+4\sin x\cos x+\cos^2x}dx,$$

这里，$a_1=1$, $b_1=-2$, $a=1$, $b=2$, $c=1$; $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$; $k_1=-\frac12$, $k_2=\frac12$; $A=\frac14$, $B=-\frac34$;

$u_1=2(\cos x-\sin x)$, $u_2=2(\cos x+\sin x)$.

代入得 $$\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx=\frac14\int\frac{2d(\cos x-\sin x)}{-2(\cos x-\sin x)^2+3}-\frac34\int\frac{2d(\cos x+\sin x)}{2(\cos x+\sin x)^2-1}$$

$$=\frac{3}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt2(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt3+\sqrt2(\sin x-\cos x)}{\sqrt3-\sqrt2(\sin x-\cos x)}\right|+C.$$

【2057】 证明：$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$

式中 A,B,C 为待定系数.

证 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$， 式中 $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

于是，
$$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int\frac{dx}{\sin^n(x+\alpha)}=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int\frac{1}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}d[\cot(x+\alpha)]$$
$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{\cot(x+\alpha)}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int\frac{\cot(x+\alpha)\cos(x+\alpha)}{\sin^{n-1}(x+\alpha)}dx$$
$$=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int\frac{1-\sin^2(x+\alpha)}{\sin^n(x+\alpha)}dx.$$

设 $I_n=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$，则由上式可得
$$I_n=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+(2-n)I_n+\frac{n-2}{a^2+b^2}I_{n-2}.$$

于是，
$$I_n=\frac{\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}\sin x-\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}I_{n-2}.$$

即
$$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中
$$A=\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)},\quad B=-\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)},\quad C=\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}.$$

【2058】 求 $\int\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

解 此为 2057 题的特例，这里 $a=1$， $b=2$， $n=3$； $A=\frac{2}{10}$， $B=-\frac{1}{10}$， $C=\frac{1}{10}$.

代入得
$$\int\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x}$$
$$=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$
$$=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right|+C.$$

其中 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\alpha=\arctan 2$.

【2059】 若 n 为大于 1 的正整数，证明：
$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}\quad(|a|\neq|b|),$$
并求出系数 A,B 和 C.

证 设 $I_n=\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$，先考虑 I_{n-1}.
$$I_{n-1}=\frac{1}{a}\int\frac{(a+b\cos x)-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b}{a}\int\frac{d(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)b^2}{a}\int\frac{\sin^2x}{(a+b\cos x)^n}dx$$
$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{n-1}{a}\int\frac{(b^2-a^2)+(a+b\cos x)(a-b\cos x)}{(a+b\cos x)^n}dx$$
$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n+\frac{n-1}{a}\int\frac{a-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$
$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n-\frac{n-1}{a}\int\frac{(a+b\cos x)-2a}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n-\frac{n-1}{a}I_{n-2}+2(n-1)I_{n-1}.$$

于是，
$$\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{a}I_n=-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}-\frac{n-2}{a}I_{n-2}.$$

最后得到
$$I_n=-\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-2},$$

即
$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

式中 $A=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$， $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$， $C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$ $(|a|\neq|b|;\ n>1$ 且 $a\neq0)$.

若 $a=0$,则 $b\neq0$,我们有

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{1}{b^n}\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{1}{b^n}\left[\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}\right]^{*)}.$$

*) 利用 2012 题(2)的结果.

求积分：

【2060】 $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

解 $$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}=\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x\sqrt{2\sec^2 x-1}}=\int\frac{d(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\sqrt2\sec x+\sqrt{2\sec^2 x-1}\right|+C=\frac{1}{\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C.$$

【2061】 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}dx$.

解 $$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}dx=\int\frac{\sin^2 x\,d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}}=2\int\sin^2 x\,d(\sqrt{\tan x})=2\int(1-\cos^2 x)d(\sqrt{\tan x})$$

$$=2\sqrt{\tan x}-2\int\frac{d(\sqrt{\tan x})}{1+\tan^2 x}=2\sqrt{\tan x}-\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}+\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{\sqrt{2\tan x}}{\tan x-1}{}^{*)}+C\quad(\tan x>0).$$

*) 利用 1884 题的结果.

【2062】 $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin2x}}$.

解 由于 $2+\sin2x=1+(\sin x+\cos x)^2=3-(\sin x-\cos x)^2$，

于是，

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin2x}}=\int\frac{\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx=\int\frac{\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin2x})$$

$$=-\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin2x}}+\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin2x}).$$

因而，

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin2x}}=\frac12\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}-\frac12\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin2x})$$

$$=\frac12\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt3}\right)-\frac12\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin2x})+C.$$

【2063】 $\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

解 此为 2059 题之特例，这里

$$a=1,\quad b=\varepsilon,\quad n=2,\quad A=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2},\quad B=\frac{1}{1-\varepsilon^2},\quad C=0.$$

代入得
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

【2064】[+] $\displaystyle\int\frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x.$

提示 令 $\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}=t$,则有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\dfrac{2}{\cos a}\mathrm{d}t$ $(\cos a\neq0)$.

解 设 $t=\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$, 则 $\mathrm{d}t=\dfrac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\dfrac{2}{\cos a}\mathrm{d}t$.

于是,
$$\int\frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}\mathrm{d}t=-\frac{2}{n\cos a}t^n+C=-\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n+C\quad(\cos a\neq0).$$

【2065】 推出积分 $I_n=\displaystyle\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n\mathrm{d}x$ (n 为正整数)的递推公式.

解 解法 1:

设 $t=\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$, 则 $x=2\arctan\left(\dfrac{1+t}{1-t}\tan\dfrac{a}{2}\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{4\tan\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}\mathrm{d}t$.

由于
$$\frac{4t^n\tan\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{4\tan\frac{a}{2}}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-2}+\frac{-4\tan\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}\cdot\frac{2\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-1}$$
$$+\frac{-4\tan\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\tan^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-2}\quad(n>2),$$

两端对 t 积分,即得递推公式 $\quad I_n=\dfrac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}+2\cos aI_{n-1}-I_{n-2}$.

解法 2:

设 $y=\dfrac{x+a}{2}$, 则 $\dfrac{x-a}{2}=y-a$, 从而,

$$I_n=2\int\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n\mathrm{d}y=2\int\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}\mathrm{d}y=2\int\frac{\sin y\cos a-\cos y\sin a}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}\mathrm{d}y$$
$$=\cos aI_{n-1}-2\sin a\int\frac{\cos y}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}\mathrm{d}y.$$

再设 $$\frac{\sin(y-a)}{\sin y}=t=\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}},\quad J_n=2\int\frac{\cos y}{\sin y}t^n\mathrm{d}y,$$

则 $$I_n=\cos a I_{n-1}-\sin a J_{n-1},\quad J_{n-1}=\frac{\cos a I_{n-1}-I_n}{\sin a}. \tag{1}$$

又 $$J_n=2\int\frac{\cos y}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n\mathrm{d}y=-\frac{2}{n}\int\sin^n(y-a)\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^n y}\right)$$
$$=-\frac{2}{n}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n+2\int\frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y}\cos(y-a)\mathrm{d}y=-\frac{2}{n}t^n+2\int t^{n-1}\frac{\cos y\cos a+\sin y\sin a}{\sin y}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{2}{n}t^n+\cos a J_{n-1}+\sin a I_{n-1}. \tag{2}$$

由(1)式和(2)式解得

$$I_n=\cos a I_{n-1}-\sin a J_{n-1}=\cos a I_{n-1}-\sin a\left(-\frac{2}{n-1}t^{n-1}+\cos a J_{n-2}+\sin a I_{n-2}\right)$$
$$=\cos a I_{n-1}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}-\sin a\cos a\left(\frac{\cos a I_{n-2}-I_{n-1}}{\sin a}\right)-\sin^2 a I_{n-2}=2\cos a I_{n-1}-I_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}.$$

§5. 各种超越函数的积分法

【2066】 证明：若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

证 $$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int P(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{ax}P'(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)\mathrm{e}^{ax}+\frac{1}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}P''(x)\mathrm{d}x$$
$$=\cdots=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式，所以，$P^{(n+1)}(x)\equiv 0$. 从而，上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

【2067】 证明：若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\int P(x)\cos ax\mathrm{d}x=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C,$$
$$\int P(x)\sin ax\mathrm{d}x=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

证 $$\int P(x)\cos ax\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int P(x)\mathrm{d}(\sin ax)=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\mathrm{d}(\cos ax)=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos ax\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^3}P''(x)\sin ax-\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax\mathrm{d}x$$
$$=\cdots=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

$$\int P(x)\sin ax\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int P(x)\mathrm{d}(\cos ax)=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\mathrm{d}(\sin ax)=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin ax\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax+\frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax-\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax\mathrm{d}x$$
$$=\cdots=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

上述导数项是有限的，其阶数$\leqslant n, a\neq 0$.

求积分：

【2068】 $\int x^3 e^{3x} dx$.

解 $\int x^3 e^{3x} dx = e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{9}+\frac{6x}{27}-\frac{6}{81}\right)^{*)}+C = e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)+C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2069】 $\int (x^2-2x+2)e^{-x} dx$.

解 $\int (x^2-2x+2)e^{-x} dx = e^{-x}\left(\frac{x^2-2x+2}{-1}-\frac{2x-2}{1}+\frac{2}{-1}\right)^{*)}+C = -e^{-x}(x^2+2)+C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2070】 $\int x^5 \sin 5x dx$.

解 $\int x^5 \sin 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{20x^3}{25}+\frac{120x}{625}\right)+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{60x^2}{25}+\frac{120}{625}\right)^{*)}+C$

$= -\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{4x^3}{5}+\frac{24x}{125}\right)+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{12x^2}{5}+\frac{24}{125}\right)+C.$

*) 利用 2067 题的结果.

【2071】 $\int (1+x^2)^2 \cos x dx$.

解 $\int (1+x^2)^2\cos x dx = \int (1+2x^2+x^4)\cos x dx$

$= \sin x[(1+2x^2+x^4)-(4+12x^2)+24]+\cos x[(4x+4x^3)-24x]^{*)}+C$

$= (21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x+C.$

*) 利用 2067 题的结果.

【2072】 $\int x^7 e^{-x^2} dx$.

解 $\int x^7 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int (x^2)^3 e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{-x^2}\left(\frac{x^6}{-1}-\frac{3x^4}{1}+\frac{6x^2}{-1}-\frac{6}{1}\right)^{*)}+C$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2073】 $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx$.

解 $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = 2\int (\sqrt{x})^5 e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}}(x^{\frac{5}{2}}-5x^2+20x^{\frac{3}{2}}-60x+120x^{\frac{1}{2}}-120)^{*)}+C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2074】 $\int e^{ax}\cos^2 bx dx$.

解 $\int e^{ax}\cos^2 bx dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}(1+\cos 2bx)dx = \frac{1}{2a}e^{ax}+\frac{1}{2}e^{ax}\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{a^2+4b^2}^{*)}+C.$

*) 利用 1828 题的结果.

【2075】 $\int e^{ax}\sin^3 bx dx$.

提示 注意 $e^{ax}\sin^3 bx = e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx-\frac{1}{4}\sin 3bx\right)$，并利用 1829 题的结果.

解 $\int e^{ax}\sin^3 bx dx = \int e^{ax}\sin bx\,\frac{1-\cos 2bx}{2}dx = \int e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx-\frac{1}{4}\sin 3bx\right)dx$

$$=\frac{3}{4}e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}^{*)}-\frac{1}{4}e^{ax}\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}^{*)}+C.$$

*） 利用 1829 题的结果.

【2076】 $\int xe^x\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int xe^x\sin x\mathrm{d}x=\int x\sin x\mathrm{d}(e^x)=xe^x\sin x-\int e^x(\sin x+x\cos x)\mathrm{d}x$

$=xe^x\sin x-\int(\sin x+x\cos x)\mathrm{d}(e^x)=e^x(x\sin x-\sin x-x\cos x)+\int e^x(2\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x$

$=e^x(x\sin x-\sin x-x\cos x)+2\int e^x\cos x\mathrm{d}x-\int xe^x\sin x\mathrm{d}x.$

于是， $\int xe^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{e^x}{2}(x\sin x-\sin x-x\cos x)+\int e^x\cos x\mathrm{d}x$

$=\frac{e^x}{2}(x\sin x-\sin x-x\cos x)+\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)^{*)}+C=\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C.$

*） 利用 1828 题的结果.

【2077】 $\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x$.

解 $\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x=\int x^2\cos x\mathrm{d}(e^x)=x^2e^x\cos x-\int e^x(2x\cos x-x^2\sin x)\mathrm{d}x$

$=x^2e^x\cos x-\int(2x\cos x-x^2\sin x)\mathrm{d}(e^x)$

$=x^2e^x\cos x-e^x(2x\cos x-x^2\sin x)+\int e^x(2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x)\mathrm{d}x$

$=e^x[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+2\int e^x\cos x\mathrm{d}x-4\int xe^x\sin x\mathrm{d}x-\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x.$

于是， $\int x^2e^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+\int e^x\cos x\mathrm{d}x-2\int xe^x\sin x\mathrm{d}x$

$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)^{*)}-2\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]^{**)}+C$

$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x+(\sin x-\cos x)]+C.$

*） 利用 1828 题的结果.

**） 利用 2076 题的结果.

【2078】 $\int xe^x\sin^2x\mathrm{d}x$.

解 $\int xe^x\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int xe^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int xe^x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}(e^x)=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x(\cos 2x-2x\sin 2x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x+\frac{e^x}{2}\cdot\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}^{*)}-\int xe^x\sin 2x\mathrm{d}x,$

而 $\int xe^x\sin 2x\mathrm{d}x=\int x\sin 2x\mathrm{d}(e^x)=xe^x\sin 2x-\int e^x(\sin 2x+2x\cos 2x)\mathrm{d}x$

$=xe^x\sin 2x-\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)^{*)}-2\int xe^x(1-2\sin^2x)\mathrm{d}x$

$=xe^x\sin 2x-\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)-2(x-1)e^x+4\int xe^x\sin^2x\mathrm{d}x.$

代入得 $\int xe^x\sin^2x\mathrm{d}x=e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]+C.$

*） 利用 1828 题的结果.

**) 利用 1829 题的结果.

【2079】 $\int (x-\sin x)^3 dx$.

解 $\int (x-\sin x)^3 dx=\int (x^3-3x^2\sin x+3x\sin^2 x-\sin^3 x)dx$

$$=\frac{x^4}{4}+3\int x^2 d(\cos x)+\frac{3}{2}\int x(1-\cos 2x)dx+\int (1-\cos^2 x)d(\cos x)$$

$$=\frac{x^4}{4}+3x^2\cos x-6\int x\cos x dx+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}\int x d(\sin 2x)+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-6\int x d(\sin x)-\frac{3}{4}x\sin 2x+\frac{3}{4}\int \sin 2x dx+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x-\frac{3}{4}x\sin 2x+\cos x-\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

【2080】 $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$dx=2tdt$. 于是,

$$\int \cos^2\sqrt{x}\,dx=2\int t\cos^2 t dt=\int t(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int t d(\sin 2t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{2}\int \sin 2t dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C.$$

【2081】 证明:若 R 为有理函数,数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公约的,则积分

$$\int R(e^{a_1 x},e^{a_2 x},\cdots,e^{a_n x})dx$$

是初等函数.

证明思路 由题设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公约的数,故存在一个不为零的实数 α,使有

$$a_1=k_1\alpha,a_2=k_2\alpha,\cdots,a_n=k_n\alpha,$$

其中,$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为整数.

令 $e^{\alpha x}=t$,即可获证.

证 按题意 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公约的数,于是,存在一个实数 α,使得

$$a_1=k_1\alpha,a_2=k_2\alpha,\cdots,a_n=k_n\alpha \quad (\alpha\neq 0),$$

其中,$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为整数.

设 $e^{\alpha x}=t$,则 $x=\frac{1}{\alpha}\ln t$,$dx=\frac{1}{\alpha t}dt$. 于是,

$$\int R(e^{a_1 x},e^{a_2 x},\cdots,e^{a_n x})dx=\frac{1}{\alpha}\int R(t^{k_1},t^{k_2},\cdots,t^{k_n})\frac{dt}{t}=\int R^*(t)dt,$$

其中 $R^*(t)$是 t 的有理函数.因此,积分 $\int R(e^{a_1 x},e^{a_2 x},\cdots,e^{a_n x})dx$ 为初等函数.

求下列积分:

【2082】 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int \frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int \frac{dx}{1+e^x}-\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}=\int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$

$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C.$$

【2083】 $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

解 $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}=\int\frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x}dx=\int(e^x-1)dx+\int\frac{1}{1+e^x}dx=e^x-x+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$=e^x-\ln(1+e^x)+C.$

【2084】 $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

解 $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}=\int\frac{dx}{(e^x+2)(e^x-1)}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{e^x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{e^x+2}dx$

$=-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C$

$=-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C.$

【2085】 $\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}.$

解 设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则 $x=6\ln t$，$dx=\frac{6}{t}dt$. 代入得

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=6\int\frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{2(t^2+1)}\right]dt$$

$$=6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln\left[(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

【2086】 $\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx.$

解 设 $e^{\frac{x}{4}}=t$，则 $x=4\ln t$，$dx=\frac{4}{t}dt$. 代入得

$$\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx=4\int\frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt=4\int\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{(1+t)^2}\right]dt=4\ln t+\frac{8}{1+t}+C=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+C.$$

【2087】 $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}=-2\int\frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}=-2\arcsin(e^{-\frac{x}{2}})+C.$

【2088】 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx.$

解 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}}+\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})+C.$

【2089】 $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx.$

解 $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx=\int\frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$

$=\int\frac{2e^{2x}+4e^x}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx+2\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}$

$=\int\frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}+2\int\frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}}+\int\frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}}$

$$=\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})-\arcsin\frac{2e^x-1}{\sqrt{5}e^x}+C.$$

【2090】 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$

$$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2.$$

对于 $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$，设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2tdt}{t^2-1}$.

于是，$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C_1$.

对于 $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$，设 $\sqrt{1-e^x}=t$，则 $x=\ln(1-t^2)$，$dx=-\frac{2tdt}{1-t^2}$.

于是，$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}=-2\int\frac{dt}{1-t^2}=-\ln\frac{1+t}{1-t}+C_2=-\ln\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}+C_2$.

代入得 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}+C.$

【2091】 证明：若 R 为有理函数，其分母仅有实根，则积分 $\int R(x)e^{ax}dx$ 可用初等函数和超越函数

$$\int\frac{e^{ax}}{x}dx=\mathrm{li}(e^{ax})+C，式中\ \mathrm{li}x=\int\frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

证 因为 R 的分母仅有实根，所以仅包含形如 $(x-a_i)^{k_i}$ 的因子 $(i=1,2,\cdots,l)$. 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$

其中 $P(x)$ 为 x 的多项式，A_{ij} 是常系数. 从而，积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\int\frac{e^{ax}}{(x-a^i)^j}dx.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数. 而积分 $\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx$ 可用初等函数和超越函数来表示. 事实上，设 $x-a_i=t$，则

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=\int\frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j}dt=\frac{e^{aa_i}}{1-j}\int e^{at}d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)=\frac{e^{aa_i}}{1-j}e^t\cdot\frac{1}{t^{j-1}}-\frac{ae^{aa_i}}{1-j}\int\frac{e^{at}}{t^{j-1}}dt.$$

这样，被积函数中分母的次数便降低一次，再继续运用分部积分法 $(j-2)$ 次，即可得

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=g_{ij}(x)+B_{ij}\ \mathrm{li}(e^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数，B_{ij} 为常数. 因此，积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\,g_{ij}(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\,B_{ij}\ \mathrm{li}(e^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和.

【2092】 若 $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数，则在什么情形下，积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$

为初等函数？

解 $\int \frac{a_k}{x^k}e^x dx = -\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{k-1}\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx=\cdots$

$$=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}-\frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-2}}-\cdots-\frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{e^x}{x}+\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx.$$

于是，$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx=\int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)e^x dx=\sum_{k=0}^{n}\int\frac{a_k}{x^k}dx$

$$=-\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-j}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx+a_0e^x.$$

因而，若 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=0$，即 $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$，则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

求积分：

【2093】 $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

解 $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^x dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx=e^x-4\mathrm{li}(e^x)-4\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=e^x-4\mathrm{li}(e^x)-\frac{4}{x}e^x+4\int\frac{e^x}{x}dx=e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

【2094】 $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx=-e^{-x}-\mathrm{li}(e^{-x})+C.$

【2095】 $\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx.$

解 $\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)}dx=\int\frac{e^{2x}}{x-2}dx-\int\frac{e^{2x}}{x-1}dx$

$$=e^4\int\frac{e^{2(x-2)}d(x-2)}{x-2}-e^2\int\frac{e^{2(x-1)}d(x-1)}{x-1}=e^4\mathrm{li}(e^{2x-4})-e^2\mathrm{li}(e^{2x-2})+C.$$

【2096】 $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

解 $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=-\int xe^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)=-xe^x\frac{1}{x+1}+\int e^x dx=-\frac{xe^x}{x+1}+e^x+C=\frac{e^x}{x+1}+C.$

【2097】 $\int\frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx.$

解 $\int\frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx=\int(x^2+4x+12)e^{2x}dx+32\int\frac{e^{2x}dx}{x-2}+16\int\frac{e^{2x}dx}{(x-2)^2}$

$$=e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{21}{4}\right)^{*)}+32e^4\mathrm{li}(e^{2x-4})-16\int e^{2x}d\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}\right)+32e^4\mathrm{li}(e^{2x-4})-\frac{16e^{2x}}{x-2}+32\int\frac{e^{2x}dx}{x-2}$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4\mathrm{li}(e^{2x-4})+C.$$

*) 利用 2066 题的结果.

求含有 $\ln f(x)$，$\arctan f(x)$，$\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$ 等函数的积分，其中 $f(x)$ 为代数函数：

【2098】 $\int\ln^n x dx$ （n 为正整数）.

解 $\int\ln^n x dx=x\ln^n x-n\int\ln^{n-1}x dx=x\ln^n x-nx\ln^{n-1}x+n(n-1)\int\ln^{n-2}x dx=\cdots$

$$=x\left[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x-\cdots+(-1)^{n-1}n!\ln x+(-1)^n n!\right]+C.$$

【2099】 $\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \ln^3 x\mathrm{d}(x^4)$

$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{4}\int x^3\ln^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{16}\int \ln^2 x\mathrm{d}(x^4)$

$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{16}x^4\ln^2 x+\frac{3}{8}\int x^3\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{16}x^4\ln^2 x+\frac{3}{32}\int \ln x\mathrm{d}(x^4)$

$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{16}x^4\ln^2 x+\frac{3}{32}x^4\ln x-\frac{3}{32}\int x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)+C.$

【2100】 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3\mathrm{d}x$.

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \ln^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x+\frac{3}{2}\int \frac{\ln^2 x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4}\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\ln^2 x-\frac{3}{4}\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\ln^2 x-\frac{3}{4x^2}\ln x+\frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C.$

【2101】 $\int \ln[(x+a)^{x-a}(x+b)^{x-b}]\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$.

解 $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}=\int \frac{\ln(x+a)}{x+b}\mathrm{d}x+\int \frac{\ln(x+b)}{x+a}\mathrm{d}x$

$=\int \ln(x+a)\mathrm{d}[\ln(x+b)]+\int \ln(x+b)\mathrm{d}[\ln(x+a)]$

$=\ln(x+a)\ln(x+b)-\int \ln(x+b)\mathrm{d}[\ln(x+a)]+\int \ln(x+b)\mathrm{d}[\ln(x+a)]$

$=\ln(x+a)\ln(x+b)+C.$

【2102】 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

解 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$

$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int \mathrm{d}x$

$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.$

【2103】 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\mathrm{d}x$.

解 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\mathrm{d}x=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$

【2104】 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

【2105】 $\int x\arctan(x+1)\mathrm{d}x$.

解 $\int x\arctan(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \arctan(x+1)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

【2106】 $\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\int\arctan\sqrt{x}\,d(x^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C.$$

【2107】 $\int x\arcsin(1-x)dx$.

解 $\int x\arcsin(1-x)dx=\frac{1}{2}\int\arcsin(1-x)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$，设 $1-x=t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx=-\int\frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}dt-2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int\sqrt{1-t^2}\,dt-2\arcsin t-2\sqrt{1-t^2}=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t-2\arcsin t-2\sqrt{1-t^2}+C_1$$

$$=\frac{-3-x}{2}\sqrt{2x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin(1-x)+C_1.$$

于是，$\int x\arcsin(1-x)dx=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$

【2108】 $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$

对于积分 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$，设 $\sqrt{x}=t$，则 $dx=2tdt$，于是，

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-2\int\sqrt{1-t^2}\,dt+2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-t\sqrt{1-t^2}-\arcsin t+2\arcsin t+C_1=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C_1.$$

因而，$\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$

【2109】 $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$.

解 $\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int\arccos\frac{1}{x}d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\mathrm{sgn}x)\sqrt{x^2-1}+C.$$

【2110】 $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$.

解 $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}d(x+1)=(x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-\mathrm{sgn}(1-x)\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$=(x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(1-x)+C,$$

其中用到了

$$\left(\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)'=\frac{\frac{1}{(1+x)^2}\left[(1+x)\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right]}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2}\sqrt{x}}=\frac{1}{1+x}\operatorname{sgn}(1-x)\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

【2111】 $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{1-x^2}=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}+C.$

【2112】 $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$

【2113】 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx.$

解 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$

$=\frac{1}{2}\int\arctan x\ln(1+x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arctan x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int x^2\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\arctan x}{1+x^2}\right]dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)dx+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int\frac{x\arctan x}{1+x^2}dx-\int x\arctan x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\int\frac{2x^2dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x\ln(1+x^2)-\int\frac{x\arctan x}{1+x^2}dx$

$+\int\frac{x\arctan x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x-\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}x$

$-\frac{1}{2}\arctan x+C$

$=x-\arctan x+\left(\frac{1+x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]+C.$

【2114】 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

解 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx=\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C.$

【2115】 $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\sqrt{1+x^2}+C.$

求含有双曲函数的积分：

【2116】 $\int\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x\,dx.$

解 $\int\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x\,dx=\frac{1}{4}\int\operatorname{sh}^22x\,dx=\frac{1}{8}\int\operatorname{sh}^22x\,d(2x)=-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}$ *) $+C.$

*) 利用 1761 题的结果.

【2117】 $\int \mathrm{ch}^4 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{ch}^4 x\mathrm{d}x=\int \left(\frac{1+\mathrm{ch}2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{ch}2x+\frac{1}{4}\mathrm{ch}^2 2x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\mathrm{sh}4x\right)^{*)}+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+\frac{1}{32}\mathrm{sh}4x+C.$

*) 利用 1762 题的结果.

【2118】 $\int \mathrm{sh}^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}^3 x\mathrm{d}x=\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{sh}x\mathrm{d}x=\int (\mathrm{ch}^2 x-1)\mathrm{d}(\mathrm{ch}x)=\frac{1}{3}\mathrm{ch}^3 x-\mathrm{ch}x+C.$

【2119】 $\int \mathrm{sh}x\mathrm{sh}2x\mathrm{sh}3x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}x\mathrm{sh}2x\mathrm{sh}3x\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}(\mathrm{ch}4x-\mathrm{ch}2x)\mathrm{sh}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{ch}4x\mathrm{sh}2x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \mathrm{ch}2x\mathrm{sh}2x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\int (\mathrm{sh}6x-\mathrm{sh}2x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int \mathrm{sh}4x\mathrm{d}x=\frac{1}{24}\mathrm{ch}6x-\frac{1}{16}\mathrm{ch}4x-\frac{1}{8}\mathrm{ch}2x+C.$

【2120】 $\int \mathrm{th}x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{th}x\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\mathrm{d}x=\ln(\mathrm{ch}x)+C.$

【2121】 $\int \coth^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \coth^2 x\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}\mathrm{d}x=x-\coth x+C.$

【2122】 $\int \sqrt{\mathrm{th}x}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \sqrt{\mathrm{th}x}\,\mathrm{d}x=\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}-\int \frac{\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-4x}}}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})}{\sqrt{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-2x})^2}}=\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(\mathrm{e}^{-2x})+C.$

【2123】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}$.

解 设 $\mathrm{th}\,\frac{x}{2}=t$，则 $\mathrm{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$， $\mathrm{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}, x=\ln\frac{1+t}{1-t}$， $\mathrm{d}x=\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\mathrm{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

【2124】 $\int \mathrm{sh}ax\sin bx\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}ax\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ax}\ \frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}^{*)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ax}\ \frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}^{*)}+C=\frac{a\mathrm{ch}ax\sin bx-b\mathrm{sh}ax\cos bx}{a^2+b^2}+C.$

*) 利用 1829 题的结果.

【2125】 $\int \mathrm{sh}ax\cos bx\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{sh}ax\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}^{*)}+\frac{1}{2}e^{-ax}\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}^{*)}+C=\frac{a\operatorname{ch}ax\cos bx-b\operatorname{sh}ax\sin bx}{a^2+b^2}+C.$$

*） 利用 1828 题的结果.

§6. 求函数积分的各种例子

求积分：

【2126】 $\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

解 $\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)}=-\frac{1}{5x^5}-\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$

$=-\frac{1}{5x^5}-\int\frac{dx}{x^4}+\int\frac{x^2}{x^4(1+x^2)}dx=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$

【2127】 $\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$.

解 $\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}=\int\frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3}dx=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2-1)^3}$

$=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}-\left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}\right]^{*)}$

$=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}\right\}^{(*)}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}$

$=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$

*） 利用 1921 题的递推公式.

【2128】 $\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

提示 注意 $1+x^4+x^8=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$， $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$，

$x^4-x^2+1=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$.

解 因为

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^3=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

所以，$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right)$， $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)$，

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是， $\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}dx-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1}dx$

$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\frac{1}{4\sqrt{3}}[\ln(x^2+x\sqrt{3}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{3}+1)]+C_1$

$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$

【2129】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

提示 令$\sqrt[6]{x}=t$.

解 设 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $\sqrt{x}=t^3$，$\sqrt[3]{x}=t^2$，$dx=6t^5dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int \frac{t^3 dt}{t+1}=6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C \quad (x>0).$$

【2130】 $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

提示 令$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$，并利用 1921 题的递推公式.

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$，则 $x=\frac{1}{1+t^2}$，$dx=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$. 代入得

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=-2\int \frac{dt}{(t^2+1)^4}$$

$$=-2\left[\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5t}{24(t^2+1)^2}+\frac{5t}{16(t^2+1)}+\frac{5}{16}\arctan t\right]^{*)}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}-\frac{5}{8}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C \quad (0<x<1).$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2131】 $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos t dt$，代入得

$$\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\sin t+2}{\sin^2 t}dt=\int \frac{dt}{\sin t}+2\int \frac{dt}{\sin^2 t}=\ln|\csc t-\cot t|-2\cot t+C$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}+C \quad (0<|x|<1).$$

【2132】 $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$.

提示 令 $\sqrt{1-x\sqrt{x}}=t$.

解 设 $\sqrt{1-x\sqrt{x}}=t$，则 $x=(1-t^2)^{\frac{2}{3}}$，$dx=-\frac{4}{3}t(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}dt$. 代入得

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx=-\frac{4}{3}\int dt=-\frac{4}{3}t+C=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C \quad (0<x<1).$$

【2133】 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 设 $\sqrt{1+x^2}=t$，则 $x^2=t^2-1$，$xdx=tdt$. 代入得

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int (t^2-1)^2 dt=\int (t^4-2t^2+1)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

【2134】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

提示 令$\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}=t$.

解 设$\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}=t$，则 $x=\frac{1}{t^3+1}$，$\mathrm{d}x=-\frac{3t^2}{(t^3+1)^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=-3\int\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\ln|t+1|-\frac{1}{2}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

【2135】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right|+C_1=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right|+C.$$

注 以上实际已设 $x>0$. 对于 $x<0$，利用 1856 题的方法可得同一结果.

【2136】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C_1=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C.$$

【2137】 $\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{x}-x-2\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x+C.$$

【2138】 $\int\frac{(1+x)\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$\int\frac{(1+x)\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}=\int\frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x}\mathrm{d}x=-x-\frac{1}{2}x^2+\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int\sqrt{x+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+2\int\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})+\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x}\sqrt{1+x}+\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+\frac{2x+1}{4}\sqrt{x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2})-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C,$$

其中设 $x>0$,对于 $x<-1$,同样可获得上述结果,但要注意在对数中要加绝对值.

【2139】 $\int\frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx.$

解 $\int\frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx=-\int\ln(1+x+x^2)d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)}dx=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\left(\frac{x+2}{1+x+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{1+x+x^2}+\frac{3}{1+x+x^2}\right)dx-\ln|1+x|$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\ln|1+x|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【2140】 $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx.$

解 $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx=\int\arccos(2x-3)d(x^2+3x)$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)+\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx-3\int\frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx+7\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{3}{2}\right)-6\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$+7\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}-\frac{1}{8}\arcsin(2x-3)-6\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$-7\arccos(2x-3)+C_1$$

$$=\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+C\quad(1<x<2).$$

【2141】 $\int x\ln(4+x^4)dx.$

解 $\int x\ln(4+x^4)dx=\frac{1}{2}\int\ln(4+x^4)d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\frac{x^5}{4+x^4}dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\left(x-\frac{4x}{4+x^4}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-x^2+2\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

【2142】 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=(\operatorname{sgn}x)\int\frac{\arcsin x\,dx}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\arcsin x\,d(\arcsin x)=-(\operatorname{sgn}x)\int\arcsin x\,d(\sqrt{x^{-2}-1})+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\arcsin x-\int\frac{dx}{|x|}\right)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\arcsin x)^2+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C \quad (0<|x|<1).$$

【2143】 $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \ln(1+\sqrt{1+x^2})d(1+\sqrt{1+x^2})$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

【2144】 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx.$

解 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{3}\int\ln\sqrt{x^2-1}d[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}]$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{x^2-1}dx,$$

对于右端的积分,设 $\sqrt{x^2+1}=t$,则 $x^2+1=t^2$,$xdx=tdt$. 于是,

$$-\frac{1}{3}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{xdx}{x^2-1}=-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}=-\frac{1}{3}\int\left(t^2+2+\frac{4}{t^2-2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{9}t^3-\frac{2}{3}t-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C.$$

最后得到

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C \quad (|x|>1).$$

【2145】$^{+}$ $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx.$

解 $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=-\int\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{1-x^2})$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)}dx.$$

右端的积分

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)}dx=\int\frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=2\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}+\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

$$=-2\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C_1=-2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C_1.$$

于是,$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin x+C \quad (0<x<1).$

【2146】 $\int\frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$

解 设 $\tan\frac{x}{2}=t$,不妨限制 $-\pi<x<\pi$,则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. 代入得

$$\int\frac{dx}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t+t^2)-\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4(1+t+t^2)}+\frac{1}{4}\left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C_1$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{**)}+C.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

**) $$\frac{1}{4(1+t+t^2)}+\frac{2t+1}{12(1+t+t^2)}=\frac{t+2}{6(1+t+t^2)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin x+1+\cos x}{\frac{1}{2}\sin x+1}=\frac{1}{6}+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}.$$

【2147】+ $\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx.$

解 $\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{1}{8}(\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8)$$

$$=\frac{1}{8}(\sin^2 2x-4-2\sqrt{2})(\sin^2 2x-4+2\sqrt{2})=\frac{1}{32}(\cos 4x+7+4\sqrt{2})(\cos 4x+7-4\sqrt{2}).$$

于是， $$\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx=32\cdot\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\int\frac{\sin 4x}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}dx-\int\frac{\sin 4x}{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\cos 4x+7-4\sqrt{2})}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\cos 4x+7+4\sqrt{2})}{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}+C.$$

【2148】 $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

解 设 $1+\cos x=t^2$，并限制 $t>0$，则 $\sin x=t\sqrt{2-t^2}$， $dx=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt$. 代入得

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{2dt}{t^2(2-t^2)}=-\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2-t^2}\right)dt=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

【2149】 $\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\arctan x\,dx.$

解 $\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\arctan x\,dx=\int\left(a-\frac{a-b}{x^2+1}\right)\arctan x\,dx=ax\arctan x-a\int\frac{x\,dx}{1+x^2}-\frac{a-b}{2}(\arctan x)^2$

$$=a\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]-\frac{a-b}{2}(\arctan x)^2+C.$$

【2150】 $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

解 $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\int\left(a+\frac{a+b}{x^2-1}\right)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$

$$=ax\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-a\int\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-1}+\frac{a+b}{2}\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

$$=a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

【2151】 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

【2152】 $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

【2153】+ $\int\frac{\sin2x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^4x}}.$

解 $\int\frac{\sin2x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^4x}}=-\int\frac{\mathrm{d}(1+\cos2x)}{\sqrt{(1+\cos2x)^2+4}}=-\ln(1+\cos2x+\sqrt{(1+\cos2x)^2+4})+C_1$

$$=-\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})+C.$$

【2154】 $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int x^2\arccos x\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+\int\sqrt{1-x^2}\left(2x\arccos x-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{2}{3}\int\arccos x\mathrm{d}[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]-\int x^2\mathrm{d}x$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x-\frac{2}{3}\int(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{3}x^3$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{3}x^3+C$$

$$=-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x+C.$$

【2155】 $\int\frac{x^4\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x^4\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\arctan x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int\arctan x\mathrm{d}(x^3)-\int\arctan x\mathrm{d}x+\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{1+x^2}-x\arctan x+\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

$$=-\frac{1}{6}x^2-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\arctan x+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$$

【2156】 $\int \frac{x\operatorname{arccot}x}{(1+x^2)^2}dx.$

解 $$\int \frac{x\operatorname{arccot}x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int \operatorname{arccot}x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{\operatorname{arccot}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{\operatorname{arccot}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arccot}x\right]^{*)}+C=-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arccot}x-\frac{x}{4(1+x^2)}+C.$$

*） 利用 1921 题的递推公式.

【2157】 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx.$

解 $$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

对于右端积分设 $x=\tan t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{1+x^2}=\sec t$， $dx=\sec^2 t dt$. 代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec t dt}{1-\tan^2 t}=\int\frac{\cos t dt}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C,$$

于是， $$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}\right|+C.$$

【2158】 $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx.$

解 $$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx.$$

于是， $$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C\quad(|x|<1).$$

【2159】 $\int x(1+x^2)\operatorname{arccot}x\,dx.$

解 $$\int x(1+x^2)\operatorname{arccot}x\,dx=\frac{1}{4}\int\operatorname{arccot}x\,d[(1+x^2)^2]=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{4}\int(1+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arccot}x+\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+C.$$

【2160】 $\int x^x(1+\ln x)dx.$

解 $$\int x^x(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}d(x\ln x)=e^{x\ln x}+C=x^x+C\quad(x>0).$$

【2161】 $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx.$

解 $$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\int\arcsin e^x d(e^{-x})=-e^{-x}\arcsin e^x+\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$=-e^{-x}\arcsin e^x-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}=-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}-1})+C$$

$$=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C\quad (x<0).$$

【2162】 $\int\frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx.$

解 $$\int\frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx=\int\left(e^{-\frac{x}{2}}-\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}\right)\arctan e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=-2\int\arctan e^{\frac{x}{2}}d(e^{-\frac{x}{2}})-2\int\arctan e^{\frac{x}{2}}d(\arctan e^{\frac{x}{2}})=-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}+\int\frac{dx}{1+e^x}-(\arctan e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-(\arctan e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}+x-\ln(1+e^x)-(\arctan e^{\frac{x}{2}})^2+C.$$

【2163】 $\int\frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}.$

解 $$\int\frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}=\int\frac{dx}{(e^{x+1}-e^{x-1})(e^{x+1}+e^{x-1}+2)}=\int\frac{dx}{e^{2x}(e-e^{-1})(e+e^{-1}+2e^{-x})}$$

$$=\int\frac{dx}{e^{2x}\,2\mathrm{sh}1(2\mathrm{ch}1+2e^{-x})}=\int\frac{dx}{4e^x\mathrm{sh}1(1+e^x\mathrm{ch}1)}=\frac{1}{4\mathrm{sh}1}\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{\mathrm{ch}1}{1+e^x\mathrm{ch}1}\right)dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{4\mathrm{sh}1}-\frac{\mathrm{ch}1}{4\mathrm{sh}1}\int\left(1-\frac{e^x\mathrm{ch}1}{1+e^x\mathrm{ch}1}\right)dx=-\frac{e^{-x}}{4\mathrm{sh}1}-\frac{\coth 1}{4}[x-\ln(1+e^x\mathrm{ch}1)]+C.$$

【2164】 $\int\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}\,dx.$

解 $$\int\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}\,dx=\int\frac{\mathrm{th}^2x+1}{\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}}dx=\int\frac{\frac{\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{ch}^2x}dx}{\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}}$$

$$=\int\frac{2\mathrm{ch}^2x-1}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}}d(\mathrm{th}x)=2\int\frac{\mathrm{ch}^2x\,d(\mathrm{th}x)}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}}-\int\frac{d(\mathrm{th}x)}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}}$$

$$=2\int\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})=2\int\frac{\mathrm{ch}x\,dx}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x}}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{d(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}x)}{\sqrt{1+2\mathrm{sh}^2x}}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}x+\sqrt{1+2\mathrm{sh}^2x})-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}+\sqrt{2}\,\mathrm{th}x}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}-\sqrt{2}\,\mathrm{th}x}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})+C.$$

【2165】 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx.$

解 $$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx=\int\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)e^x\,dx=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}d(e^x)=e^x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}d(e^x)+\int\tan\frac{x}{2}d(e^x)=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

【2166】 $\int|x|\,dx.$

提示 注意$|x|=(\mathrm{sgn}x)x$.

解 $$\int|x|\,dx=(\mathrm{sgn}x)\int x\,dx=(\mathrm{sgn}x)\frac{1}{2}x^2+C=\frac{x|x|}{2}+C.$$

【2167】 $\int x|x|\mathrm{d}x$.

解 $\int x|x|\mathrm{d}x=(\mathrm{sgn}x)\int x^2\mathrm{d}x=(\mathrm{sgn}x)\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^2|x|}{3}+C$.

【2168】 $\int (x+|x|)^2\mathrm{d}x$.

提示 利用 2167 题的结果.

解 $\int (x+|x|)^2\mathrm{d}x=\int (x^2+2x|x|+x^2)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2|x|}{3}^{*)}+C=\frac{2x^2}{3}(x+|x|)+C$.

*) 利用 2167 题的结果.

【2169】 $\int (|1+x|-|1-x|)\mathrm{d}x$.

提示 利用 2166 题的结果.

解 $\int (|1+x|-|1-x|)\mathrm{d}x=\int |1+x|\mathrm{d}(1+x)+\int |1-x|\mathrm{d}(1-x)$

$=\frac{(1+x)|1+x|}{2}^{*)}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}^{*)}+C$

*) 利用 2166 题的结果.

【2170】 $\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

解题思路 由于 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数 $F(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数. 可求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 易知

$$F(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 为常数，并注意 $0=F(0)=\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)$. 求得 C_1、C_2 后即获解.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C_1$，

当 $x<0$ 时，$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C_2$.

由于 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数 $F(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数. 今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知，必有

$$F(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 是两个常数. 由于 $0=F(0)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)$，即 $0=-1+C_1=1+C_2$，因此，$C_1=1,C_2=-1$. 从而，

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}-1, & x<0.\end{cases}$$

所以，

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}-1+C, & x<0.\end{cases}$$

【2171】 $\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x$.

提示 仿 2170 题，可求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$.

解 仿 2170 题，

当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C_1$；

当 $x>1$ 时，$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_2$；

当 $x<-1$ 时，$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_3$.

今求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知，必有

$$F(x)=\begin{cases} x+C_1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3+C_2, & x>1, \\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x<-1, \end{cases}$$

其中 C_1,C_2,C_3 是三个常数. 由于 $1=F(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)$，即 $1=1+C_1=\frac{1}{3}+C_2$，故 $C_1=0,C_2=\frac{2}{3}$. 再由 $F(-1)=\lim\limits_{x\to -1-0}F(x)$，得 $-1=-\frac{1}{3}+C_3$，故 $C_3=-\frac{2}{3}$. 由此可知，有

$$F(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}, & x>1, \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}, & x<-1. \end{cases}$$

最后得

$$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x=\begin{cases} x+C, & |x|\leqslant 1, \\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x+C, & |x|>1. \end{cases}$$

【2172】 $\int \varphi(x)\mathrm{d}x$，其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离.

提示 仿 2170 题，可求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$.

解 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微. 今求满足 $F(0)=0$ 的原函数. 由于

$$\varphi(x)=\begin{cases} x-n, & n\leqslant x<n+\frac{1}{2}, \\ -x+n+1, & n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1, \end{cases}$$

故

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-nx+C_n, & n\leqslant x<n+\frac{1}{2}, \\ -\frac{x^2}{2}+(n+1)x+C_n', & n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1, \end{cases}$$

其中 C_n,C_n' 是两个常数. 由 $\lim\limits_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)-0}F(x)=F\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 得，$C_n'=C_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$. 故

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-nx+C_n, & n\leqslant x<n+\frac{1}{2}, \\ -\frac{x^2}{2}+(n+1)x-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+C_n, & n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1. \end{cases}$$

由 $\lim\limits_{x\to(n+1)-0}F(x)=F(n+1)$ 得递推公式 $C_{n+1}=C_n+n+\frac{3}{4}$.

显然 $0=F(0)=C_0$. 由此得 $C_n=\frac{1}{4}n(2n+1)$. 于是，

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+\dfrac{1}{4}n(2n+1)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1+2\left(\dfrac{1}{2}-x-n\right)\right], \\ \qquad\qquad n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\dfrac{1}{4}(2n+1)(n+1)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\right], \\ \qquad\qquad n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1.\end{cases}$$

记 $(x)=x-[x]$ 表数 x 去掉其整数部分$[x]$后所剩下的零头部分，那么最后得

$$F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left[(x)-\frac{1}{2}\right]\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

故
$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left[(x)-\frac{1}{2}\right]\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}+C\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【2173】 $\int[x]|\sin\pi x|\mathrm{d}x\quad(x\geqslant0)$.

解 分别求出在区间$[0,1)$,$[1,2)$,$[2,3)$,…,$[[x],x]$上满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$的增量如下：

在$[0,1)$上，$\int 0\cdot\sin\pi x\mathrm{d}x=C_1$，$F(1)-F(0)=0$；

在$[1,2)$上，$-\int\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cos\pi x+C_2$，$F(2)-F(1)=\frac{2}{\pi}$；

在$[2,3)$上，$2\int\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\cos\pi x+C_3$，$F(3)-F(2)=\frac{2\cdot2}{\pi}$；…

在$[[x],x]$上，$\quad(-1)^{[x]}[x]\int\sin\pi x\mathrm{d}x=(-1)^{[x]}[x]\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos\pi x+C_{[x]+1}$，

$$F(x)-F([x])=\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x).$$

从而，对于 $x\geqslant0$，得到

$$\begin{aligned}&\int[x]|\sin\pi x|\mathrm{d}x=F(x)+C\\&=[F(1)-F(0)]+[F(2)-F(1)]+[F(3)-F(2)]+\cdots+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C\\&=\frac{2}{\pi}+\frac{2\cdot2}{\pi}+\cdots+\frac{2([x]-1)}{\pi}+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C\\&=\frac{[x]([x]-1)}{\pi}+\frac{(-1)^{[x]}[x](-1)^{[x]}}{\pi}-\frac{(-1)^{[x]}[x]\cos\pi x}{\pi}+C\\&=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)+C.\end{aligned}$$

【2174】 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 其中 $\quad f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant1,\\1-|x|, & |x|>1.\end{cases}$

解 当$|x|\leqslant1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1-x^2)\mathrm{d}x=x-\frac{x^3}{3}+C_1$；

当 $x>1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1-|x|)\mathrm{d}x=x-\frac{x|x|}{2}+C_2$；

当 $x<-1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1-|x|)\mathrm{d}x=x-\frac{x|x|}{2}+C_3$.

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 利用$F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to1+0}F(x)=F(1)$，$\lim\limits_{x\to-1-0}F(x)=F(-1)$，仿 2171 题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x-\dfrac{x^3}{3}, & |x|\leqslant 1, \\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}, & x>1, \\ x-\dfrac{x|x|}{2}-\dfrac{1}{6}, & x<-1. \end{cases}$$

于是，
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} x-\dfrac{x^3}{3}+C, & |x|\leqslant 1; \\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}\operatorname{sgn}x+C, & |x|>1. \end{cases}$$

【2175】 $\int f(x)\mathrm{d}x$，式中 $f(x)=\begin{cases} 1, & -\infty<x<0, \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x, & 1<x<+\infty. \end{cases}$

解 当 $-\infty<x<0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C_1$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+C_2$；

当 $1<x<+\infty$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C_3$.

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)=F(0)$，$\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)=F(1)$，仿 2171 题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2+\dfrac{1}{2}, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

于是，
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} x+C, & -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

【2176】 求 $\int xf''(x)\mathrm{d}x$.

解* $\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}[f'(x)]=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C.$

【2177】 求 $\int f'(2x)\mathrm{d}x$.

解* $\int f'(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}f(2x)+C.$

*） 这里暗中分别假定了被积函数 f'，f 是连续的.

【2178】 设 $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解 由 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$. 于是，

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$

【2179】$^+$ 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，求 $f(x)$.

解 由 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 得 $f'(x)=1-x$. 于是，

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1-x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}x^2+C\quad(|x|\leqslant 1).$$

【2180】 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<+\infty,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

提示 令 $\ln x=t$.

解 设 $t=\ln x$，则 $f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$ 于是，

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C_2, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 是两个常数. 由假定 $f(0)=0$，得 $C_1=0$. 再由 $f(x)$在 $x=0$ 的连续性知，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$，由此得 $C_2=-1$. 于是，

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

第四章 定 积 分

§1. 定积分是积分和的极限

1° **黎曼积分** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则数

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,\ (x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},\Delta x_i=x_{i+1}-x_i) \tag{1}$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分*.

极限(1)存在的充分必要条件为：

$$\text{下积分和 } \underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i \quad \text{及} \quad \text{上积分和 } \overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$$

当 $|\Delta x_i|\to 0$ 时有共同的极限，其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x) \quad \text{及} \quad M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x).$$

若等式(1)右端的极限存在，则函数 $f(x)$ 称为相应区间上的可积函数(常义的)，例如：(ⅰ)连续函数；(ⅱ)具有有限个不连续点的有界函数；(ⅲ)单调有界的函数，这些都是任意有限闭区间上的可积函数. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界，则它在 $[a,b]$ 上不可积(常义的).

2° **可积条件** 函数 $f(x)$ 在已知闭区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件为成立等式

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 有闭区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅.

【2181】 把区间 $[-1,4]$ 分为 n 个相等的子区间，并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值 $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 求函数 $f(x)=1+x$ 在此区间上的积分和 S_n.

解 每个子区间长为 $\frac{5}{n}$，第 i 个子区间为 $\left(-1+\frac{5i}{n},\ -1+\frac{5i}{n}+\frac{5}{n}\right)$，其中点 $\xi_i=-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}$. 于是，所求的积分和为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{1+\left[-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\frac{5}{n}=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)=12\frac{1}{2}.$$

【2182】 把所给区间分为 n 个相等的子区间，求下列函数 $f(x)$ 在相应区间上的下积分和 $\underline{S_n}$ 及上积分和 $\overline{S_n}$：

(1) $f(x)=x^3\quad(-2\leqslant x\leqslant 3)$；　(2) $f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$；　(3) $f(x)=2^x\quad(0\leqslant x\leqslant 10)$.

解 (1) 把区间 $[-2,3]$ n 等分，则每一个子区间的长为 $h=\frac{5}{n}$，且第 i 个子区间为 $[-2+ih,\ -2+(i+1)h]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 若令 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的下确界及上确界，则因 $f(x)=x^3$ 为增函数，所以，

$$m_i=(-2+ih)^3,\quad M_i=[-2+(i+1)h]^3\quad(i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是，　$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(-2+ih)^3h$

---

* 这里的和 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为积分和.

$$=-8nh+12h^2\sum_{i=0}^{n-1}i-6h^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2+h^4\sum_{i=0}^{n-1}i^3$$

$$=-40+\frac{12\cdot 25n(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[-2+(i+1)h]^3=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

(2) $h=\frac{1}{n}$, $m_i=\sqrt{\frac{i}{n}}$, $M_i=\sqrt{\frac{i+1}{n}}$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$.

于是，$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$； $\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i+1}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$.

(3) $h=\frac{10}{n}$, $m_i=2^{ih}$, $M_i=2^{(i+1)h}$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$.

于是，$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}h2^{ih}=\frac{h(2^{nh}-1)}{2^h-1}=\frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$； $\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}h2^{(i+1)h}=\frac{h2^h(2^{nh}-1)}{2^h-1}=\frac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$.

【2183】 把闭区间[1,2]分为 n 份，使这分点的横坐标构成一等比数列*)，求函数 $f(x)=x^4$ 在[1,2]上的下积分和. 当 $n\to\infty$时此和的极限等于什么？

解 设$\sqrt[n]{2}=q$ 或 $2=q^n$，分点为 $1=q^0<q^1<q^2<\cdots<q^n=2$. 由于 $f(x)=x^4$ 在[1,2]上为增函数，故下积分和为

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[(q^i)^4(q^{i+1}-q^i)]=(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^i)^5=\frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}=\frac{31(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{32}-1},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=31\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}=31\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{16}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1}=\frac{31}{5}.$$

*）原题为“使这 n 份的长构成等比数列”，现根据原题答案予以改正.

【2184】+ 从积分的定义出发，求$\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t$，其中 T,v_0,g 为常数.

解 $f(t)=v_0+gt$ 在$[0,T]$上为增函数$(T>0)$.

$$h=\frac{T}{n},\quad m_i=v_0+igh,\quad M_i=v_0+(i+1)gh\quad(i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

于是，
$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}(v_0+igh)h=nv_0h+gh^2\sum_{i=0}^{n-1}i=v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=v_0T+\frac{gT^2}{2}-\frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}[v_0+(i+1)gh]h=v_0T+\frac{gT^2}{2}+\frac{gT^2}{2n}.$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=v_0T+\frac{gT^2}{2},$$

所以，
$$\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t=v_0T+\frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法分割积分区间，并视积分为相应积分和的极限，计算下列定积分：

【2185】 $\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x$.

解题思路 由于 $f(x)=x^2$ 在$[-1,2]$上连续，故所给的定积分存在，且它与分法无关，同时也与点 ξ_i 的取法无关. 本题将$[-1,2]n$ 等分，得子区间的长 $h=\frac{3}{n}$，并取点 $\xi_i=-1+ih$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，这种和的极限就是所求的定积分. 以下各题如无特殊情况，不再说明定积分的存在性，直接对区间分段并取点 ξ_i，作和求极限.

解 将区间$[-1,2]n$ 等分，得 $h=\frac{3}{n}$. 取 $\xi_i=-1+ih$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$.

作和 $$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(-1+ih)^2h=nh-2h^2\sum_{i=0}^{n-1}i+h^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2=3+\frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是， $$\lim_{n\to\infty}S_n=3.$$

由于 $f(x)=x^2$ 在$[-1,2]$上连续，故积分 $\int_{-1}^{2}x^2\,dx$ 是存在的，且它与分法无关，同时也与点的取法无关. 因此，上述和的极限就是所求的积分值，即定积分

$$\int_{-1}^{2}x^2\,dx=3.$$

【2186】 $\int_0^1 a^x\,dx \quad (a>0)$.

提示 当 $a\neq1$ 时，将$[0,1]$$n$ 等分，得 $h=\frac{1}{n}$，并取点 $\xi_i=ih\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$. 同时利用 541 题的结果. 当 $a=1$ 时，定积分显然为 1.

解 当 $a\neq1$ 时，将区间$[0,1]$$n$ 等分，得 $h=\frac{1}{n}$. 取 $\xi_i=ih\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$.

作和 $$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}ha^{ih}=\frac{h(a^{nh}-1)}{a^h-1}=\frac{a-1}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{a-1}{\ln a},\quad \text{即}\quad \int_0^1 a^x\,dx=\frac{a-1}{\ln a}\quad(a\neq1).$$

当 $a=1$ 时，积分显然为 1.

【2187】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$.

解 将区间$[0,\frac{\pi}{2}]$$n$ 等分，得 $h=\frac{\pi}{2n}$. 取 $\xi_i=ih\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$.

作和 $$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}h\sin ih.$$

由于 $$\sin ih=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{2i-1}{2}h-\cos\frac{2i+1}{2}h\right),$$

所以， $$S_n=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2i-1}{2}h-\cos\frac{2i+1}{2}h\right)=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{h}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}h\right).$$

最后得到 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right)=1,$$

即 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1.$$

【2188】 $\int_0^x\cos t\,dt$.

解 将区间$[0,x]$$n$ 等分，得 $h=\frac{x}{n}$. 取 $\xi_i=ih\ (i=0,1,\cdots,n-1)$. 与 2187 题类似，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}h\cos ih=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left(\sin\frac{h}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}h\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\sin\frac{x}{2n}+\sin\frac{(2n-1)x}{2n}\right]=\sin x,$$

即 $$\int_0^x\cos t\,dt=\sin x.$$

【2189】 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(0<a<b)$.

提示 将$[a,b]n$等分，设分点为 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 并取 $\xi_i=\sqrt{x_ix_{i+1}}$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$.

解 将区间$[a,b]n$等分，设分点为

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

取 $\xi_i=\sqrt{x_ix_{x+1}}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$. 显然 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$. 作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x_ix_{i+1}}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

即
$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

【2190】 $\int_a^b x^m\mathrm{d}x$ $(0<a<b;\ m\neq-1)$.

提示 选择诸分点，使它们的横坐标构成一等比数列，即

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^i<\cdots<aq^{n-1}<aq^n=b,$$

其中 $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$，并取 $\xi_i=aq^i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$.

解 选择诸分点，使它们的横坐标构成一等比数列，即

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^i<\cdots<aq^{n-1}<aq^n=b,\quad 其中\quad q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取 $\xi_i=aq^i$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，作和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^m(aq^{i+1}-aq^i)=a^{m+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}q^{(m+1)i}=a^{m+1}(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}\\&=(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{q-1}{q^{m+1}-1}.\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}q=1$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=(b^{m+1}-a^{m+1})\lim_{n\to\infty}\frac{q-1}{q^{m+1}-1}=(b^{m+1}-a^{m+1})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^m+q^{m-1}+\cdots+1}=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

即
$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

【2191】 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $(0<a<b)$.

解 同 2190 题的区间分法及点 ξ_i 取法，得和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^{-1}(aq^{i+1}-aq^i)=n(q-1)=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right).$$

由于
$$\lim_{t\to0}\frac{\alpha^t-1}{t}=\ln\alpha\ (\alpha>0)\quad(可用洛必达法则),$$

命 $\alpha=\frac{b}{a}$，而$\frac{1}{n}$是趋于 0 的变量，应用这一极限即得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=\ln\frac{b}{a},$$

即
$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{b}{a}.$$

【2192】 计算泊松积分$\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$. 考虑两种情形：(1) $|\alpha|<1$； (2) $|\alpha|>1$.

提示 分解多项式 $\alpha^{2n}-1$ 为二次因式.

解 因为$(1-|\alpha|)^2\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2$，所以当$|\alpha|\neq 1$时，被积函数是连续的，于是，积分就存在. 把区间$[0,\pi]$分成$n$个相等部分，即有

$$S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left[(1+\alpha)^2\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

另一方面，我们可以证明 $t^{2n}-1=(t^2-1)\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$.

事实上，方程$t^{2n}-1=0$共有$2n$个根，记作

$$1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n=-1,\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\cdots,\bar{\varepsilon}_{n-1},$$

其中

$$\varepsilon_i=\cos\frac{i\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}$$

及

$$\bar{\varepsilon}_i=\cos\frac{i\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}\quad(\mathrm{i}^2=-1).$$

于是，$t^{2n}-1=(t+1)(t-1)\prod\limits_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$

$$=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}\right)\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

当$t=\alpha$时，利用上式就可把S_n表成下面的形式

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

于是，(1) 当$|\alpha|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$，即$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=0$.

(2) 当$|\alpha|>1$时，把S_n改写成$S_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right]$后，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$，即$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=2\pi\ln|\alpha|$.

【2193】 设函数$f(x)$及$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},\ x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$，

且 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\quad(x_0=a,\ x_n=b)$.

证 因为$f(x)$及$\varphi(x)$均在$[a,b]$上连续，所以，它们的乘积$f(x)\varphi(x)$也在$[a,b]$上连续. 因此，积分

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\tag{1}$$

存在. 由于$f(x)$在$[a,b]$连续，故有界，即存在常数$M>0$，使$|f(x)|\leqslant M\ (a\leqslant x\leqslant b)$；又由于$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，故一致连续，因此，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$\max|\Delta x_i|<\delta$时，恒有

$$|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\quad(i=0,1,\cdots,n-1).$$

从而，$\left|\sum\limits_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\cdot|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\cdot|\Delta x_i|$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}M\frac{\varepsilon}{M(b-a)}|\Delta x_i|=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i=0.\tag{2}$$

由(1)式和(2)式，最后得到$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i$.

【2194】 证明：不连续函数$f(x)=\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$在区间$[0,1]$上可积.

证 首先注意，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在[0,1]上有界，其不连续点是

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$在[0,1]的任何部分区间上的振幅 $\omega\leqslant 2$.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$上只有有限个不连续点，故可积. 因此，存在 $\eta>0$，使得对$\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$的任何分法，只要$\max|\Delta x'_i|<\eta$，就有 $\sum_{i'}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 显然，若$[\alpha,\beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$，则对于$[\alpha,\beta]$的任何分法，只要$\max|\Delta x'_i|<\eta$，也有 $\sum_{i'}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$. 现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是[0,1]的满足$\max|\Delta x_i|<\delta$ 的任一分法，设$x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{5}<x_{i_0+1}$.

由上述，有 $\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 又显然有

$$\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<2\,\frac{2\varepsilon}{5}=\frac{4\varepsilon}{5}.$$

故
$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此可知
$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

于是，$f(x)$在[0,1]可积.

【2195】 证明：黎曼函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}\quad (m\text{ 及 }n(n\geqslant 1)\text{为互素的整数})\end{cases}$$

在任何有限区间上可积分

证 为简单起见，我们只考虑闭区间[0,1]（对于一般的有限闭区间$[a,b]$，可类似地讨论之）.

命 $\lambda>0$ 将区间[0,1]分成长度 $\Delta x_i<\lambda$ 的若干部分区间，取任意的正整数 N，将所有的部分区间分成两类：把包含分母 $n\leqslant N$ 的数$\frac{m}{n}$的区间列入第一类，而把不包含上述数的那些区间列入第二类. 对于第一类，由于满足条件 $n\leqslant N$ 的数$\frac{m}{n}$只有有限个，个数记为 $k=k_N$，所以，第一类区间的个数就不大于 $2k$，而它们长度的总和不超出 $2k\lambda$；对于第二类，由于在这些区间内除含有无理数外，仅能含 $n>N$ 的有理数$\frac{m}{n}$，而在这种有理点上，$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$，所以，振幅 ω_i 小于$\frac{1}{N}$.

这样一来，和数 $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$ 就分成两部分，分别估计它们的值，即得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<2k_N\lambda+\frac{1}{N}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取定一个 $N>\frac{2}{\varepsilon}$，然后取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4k_N}$. 于是，当 $\lambda<\delta$ 时，必有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

所以，函数 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上可积.

【2196】 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在闭区间$[0,1]$上可积.

证 首先注意，函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有界，其不连续点是

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$ 在$[0,1]$的任何部分区间上的振幅 $\omega\leqslant 1$.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在$\left[\frac{\varepsilon}{3},1\right]$上只有有限个不连续点，故可积. 因此，存在 $\eta>0$，使得对$\left[\frac{\varepsilon}{3},1\right]$的任何分法，只要 $\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，就有 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{3}$. 显然，若$[\alpha,\beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{3},1\right]$，则对于$[\alpha,\beta]$的任何分法，只要 $\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{3}$.

令 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{3},\eta\right)$. 现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是$[0,1]$的满足 $\max|\Delta x_i|<\delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}<x_{i_0+1}$. 由上述，有

$$\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又显然有

$$\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<\frac{2\varepsilon}{3}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

于是，

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

由此可知，$f(x)$ 在$[0,1]$上可积.

【2197】 证明：狄利克雷函数 $\chi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$ 在任意区间上不可积.

提示 注意 $\omega_i=1$.

证 在任意区间$[a,b]$的任何部分区间上均有 $\omega_i=1$，所以，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a$，它不趋于零. 因此，函数 $\chi(x)$ 在$[a,b]$上不可积.

【2198】 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，且

$$f_n(x)=\sup f(x)\ (x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}),$$

其中

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\ (i=0,1,\cdots,n-1;n=1,2,\cdots).$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明思路 注意 $f_n(x)$ 是不超过$(n+1)$个不连续点的阶梯函数，因此，它在$[a,b]$上可积. 于是，有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x,$$

从而，命题易获证.

证 $f_n(x)$ 是不超过 $n+1$ 个不连续点的阶梯函数，因此，$f_n(x)$ 在$[a,b]$上可积. 于是，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega_i\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to 0\quad\left(\text{当 }\max|\Delta x_i|=\frac{b-a}{n}\to 0\text{ 时}\right),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【2199】 证明:若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则存在连续函数 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$的序列,使得在 $a\leqslant c\leqslant b$时

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 将区间$[a,b]$ n 等分,设分点为

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b,$$

即

$$x_i^{(n)}=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

在 $\Delta x_i^{(n)}=[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上令 $\varphi_n(x)$为过点$[x_{i-1}^{(n)},f(x_{i-1}^{(n)})]$及$[x_i^{(n)},f(x_i^{(n)})]$的直线,即当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$时,令

$$\varphi_n(x)=f(x_{i-1}^{(n)})+\frac{x-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}[f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$是$[a,b]$上的连续函数,因此,它是可积的.

若令 $m_i^{(n)}$,$M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$分别表示函数 $f(x)$在$[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上的下确界,上确界及振幅,则当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ 时,

$$m_i^{(n)}\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i^{(n)},\quad m_i^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant M_i^{(n)},$$

从而,

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i^{(n)}.$$

于是,当 $a\leqslant c\leqslant b$ 时,

$$\left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_a^c \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^c |f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}}|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

由于 $f(x)$在$[a,b]$上可积,因此,当 $\max|\Delta x_i^{(n)}|=\frac{b-a}{n}\to0$ 时,必有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}\to0.$$

由此可知 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant c\leqslant b)$.

【2200】 证明:若有界的函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可积,则其绝对值$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积,并且 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

证明思路 设 x'及 x''为区间$[x_i,x_{i+1}]$上的任意两点,则由

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\leqslant|f(x')-f(x'')|$$

可知,函数$|f(x)|$在$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$在该区间上的振幅 ω_i,因而,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to0,$$

即函数$|f(x)|$在$[a,b]$上可积.

其次,由 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$,命题易获证.

证 对于区间$[x_i,x_{i+1}]$上任意两点 x'及 x'',总有

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\leqslant|f(x')-f(x'')|,$$

所以,函数$|f(x)|$在$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$在此区间上的振幅 ω_i,因而,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to0,$$

即$|f(x)|$在$[a,b]$上可积.

其次,因为 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$,所以,

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

【2201】 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上绝对可积.即积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 存在.这个函数在$[a,b]$上是否为可积函数?

提示 不一定可积.例如,函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ -1, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

解 一般地说,不.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ -1, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

$|f(x)|=1$,它在$[a,b]$上连续,因此,它在$[a,b]$上可积.但对于函数 $f(x)$而言,在$[a,b]$的任一部分区间上 $\omega_i=2$,所以,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a),$$

它不趋向于零.于是,函数 $f(x)$在$[a,b]$上不可积.

【2202】 设函数 $\varphi(x)$在闭区间$[A,B]$上有定义并连续,函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,并且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $A\leqslant f(x)\leqslant B$.证明:函数$\varphi[f(x)]$在$[a,b]$上可积.

证 任给 $\varepsilon>0$,根据函数 $\varphi(x)$在$[A,B]$的一致连续性,存在 $\eta>0$,使得在$[A,B]$中长度小于 η 的任一闭区间上,函数 φ 的振幅都小于$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.用 Ω 表$\varphi(x)$在$[A,B]$上的振幅.由 $f(x)$在$[a,b]$的可积性知,必有 $\delta>0$ 存在,使对$[a,b]$的任一分法,只要 $\max|\Delta x_i|<\delta$,就有 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}$.($\omega_i(f)$表 $f(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅).

下证对$[a,b]$的任何分法,只要 $\max|\Delta x_i|<\delta$,就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i<\varepsilon.$$

事实上,将诸区间$[x_i,x_{i+1}]$分成两组,第一组是满足 $\omega_i(f)<\eta$ 的(其下标以"i'"记之),第二组是满足 $\omega_i(f)\geqslant\eta$的(下标以"i''"记之).于是,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i=\sum_{i'}\omega_{i'}(\varphi(f))\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(\varphi(f))\Delta x_{i''}<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''},$$

但 $$\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}>\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i=\sum_{i'}\omega_{i'}(f)\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}\geqslant\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}\geqslant\eta\sum_{i''}\Delta x_{i''},$$

于是, $$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\Omega\frac{\varepsilon}{2\Omega}=\varepsilon.$$

由此可知,$\varphi[f(x)]$在$[a,b]$上可积.

【2203】 若函数 $f(x)$及 $\varphi(x)$可积,则函数 $f[\varphi(x)]$是否也必定可积?

解题思路 不一定可积.例如,函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq0.\end{cases}$ $\varphi(x)$为黎曼函数(参阅 2195 题).并利用 2197 题的结果.

解 不一定可积.例如,函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq0,\end{cases}$ 及 $\varphi(x)$为黎曼函数(参阅 2195 题).它们在任何有限区间上均可积(前者不连续点仅为原点一个,且是有界函数,因而是可积分的).

但 $f[\varphi(x)]=\chi(x)$,利用 2197 题的结果得知,它在任何有限区间上不可积.

【2204】 设函数 $f(x)$在闭区间$[A,B]$上可积,证明:函数 $f(x)$有积分连续性,即

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

其中$[a,b]\subset[A,B]$.

证 证法 1：

不妨设 $A<a$，$b<B$. 由于 $f(x)$在$[A,B]$可积，故对任给$\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使对$[A,B]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_i|<\eta$，就恒有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i<\varepsilon;$$

显然，对$[A,B]$的任一子区间 $[A',B']$ 的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有

$$\sum_{i'} \omega_{i'}(f)\Delta x_{i'}<\varepsilon. \tag{1}$$

今设 $0<h<\delta=\min\left\{\frac{\eta}{2},\frac{B-b}{3}\right\}$，则对于 h，存在正整数$n=n(h)$，使有 $a+(2n-2)h<b\leqslant a+2nh<a+(2n+1)h<B$. 用 ω_i 表 $f(x)$在$[a+ih,\ a+(i+2)h]$上的振幅，则

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{a+2nh} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\doteq\sum_{i=0}^{2n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=0}^{2n-1}\omega_i h$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h.$$

显然，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h$ 是对于区间$[a,a+2nh]$的分法 $a<a+2h<a+4h<\cdots<a+2nh$ 所作的(1)式中的和，而 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h$ 是对于区间$[a+h,a+(2n+1)h]$的分法 $a+h<a+3h<a+5h<\cdots<a+(2n+1)h$ 所作的(1)式中的和. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h<\varepsilon,\quad \sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h<\varepsilon.$$

从而，
$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此可知
$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

同理可证
$$\lim_{h\to 0-}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

于是，
$$\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证法 2：

由 2199 题的结果可知：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$在$[A,B]$上可积，故存在$[A,B]$上的连续函数$\varphi(x)$，使

$$\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$在$[A,B]$上一致连续，故存在 $\delta>0$，使当$|x'-x''|<\delta$ （$x'\in[A,B]$，$x''\in[A,B]$）时，恒有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是，当$|h|<\delta$时，

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|\mathrm{d}x+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<2\ \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.$$

故
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

【2205】 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可积，证明：等式

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$$

当且仅当对属于闭区间$[a,b]$内函数 $f(x)$连续的一切点有$f(x)=0$ 时方成立.

证 先证必要性：

采用反证法. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但 $f(x_0)\neq 0$，则存在 $\delta>0$，$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$，使当 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 时

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而，
$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{f^2(x_0)}{2}\ 2\delta=\frac{\delta f^2(x_0)}{2}>0.$$

这与假设 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

再证充分性：

也即要证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积条件下，假设 $f(x)$ 在一切连续点 x_0 上均有 $f(x_0)=0$，则必有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明分两个部分. 第一，首先要指出当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，$f(x)$ 的连续点在 $[a,b]$ 中必定是稠密的. 此处所谓"稠密"性是指：对于任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，总存在一点 $x_0\in[\alpha,\beta]$，使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 第二，利用假设，并借助于稠密性，可证得充分性.

现在先证第二部分：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0\in X$ 时有 $f(x_0)=0$ 的假设. 即知，对于区间 $[a,b]$ 的任一分法，均可适当地取 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，使 $f(\xi_i)=0$. 从而积分和 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0$. 由此，再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 的可积性，便有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0.$$

如今再补证第一部分：应当首先指明，若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，则对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $[\alpha,\beta]$ 的子区间 $[\alpha',\beta']$，使得振幅

$$\varepsilon(\alpha',\beta')<\varepsilon.$$

事实上，如果上述结论不成立，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于 $[\alpha,\beta]$ 的任意分法，有

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_i\Delta x=\varepsilon_0(\beta-\alpha)>0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积矛盾，因此，结论为真.

今取 $[\alpha,\beta]$ 为 $[a_1,b_1]$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]$ 上可积，故存在区间 $[a_2,b_2]\subset\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]\subset[a_1,b_1]$，使 $\omega[a_2,b_2]<\frac{1}{2}$. 同样，存在区间

$$[a_3,b_3]\subset\left[a_2+\frac{b_2-a_2}{4},\ b_2-\frac{b_2-a_2}{4}\right]\subset[a_2,b_2],$$

使 $\omega[a_3,b_3]<\frac{1}{3}$. 这样继续下去，得一串闭区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$，满足

$$\alpha=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1=\beta,$$

并且
$$b_n-a_n\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}\to 0,\quad \omega[a_n,b_n]<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由区间套定理，诸 $[a_n,b_n]$ 具有唯一的公共点 c. 显然 $a_n<c<b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 下证 $f(x)$ 在点 c 连续.

任给 $\varepsilon>0$，取正整数 n_0 使 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$. 再取 $\delta>0$ 使 $(c-\delta,c+\delta)\subset[a_{n_0},b_{n_0}]$. 于是，当 $|x-c|<\delta$ 时，必有

$$|f(x)-f(c)|\leqslant\omega[a_{n_0},b_{n_0}]<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在点 $x=c$ 连续. 到此，充分性证毕.

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° **牛顿—莱布尼茨公式** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且连续，$F(x)$ 为它的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^{b\,*)}.$$

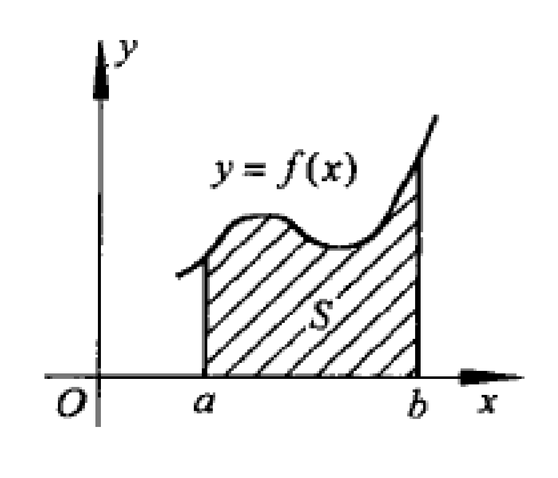


图 4.1

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，OX 轴及垂直于 OX 轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 S（图 4.1）。

2° **分部积分法** 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续并有连续导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$（即 $f(x),g(x)\in C^{(1)}(a,b)$），则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

3° **变量代换** 若：(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，(2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，其中 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$；(3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有定义并连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

利用牛顿—莱布尼茨公式，求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积：

【2206】 $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$

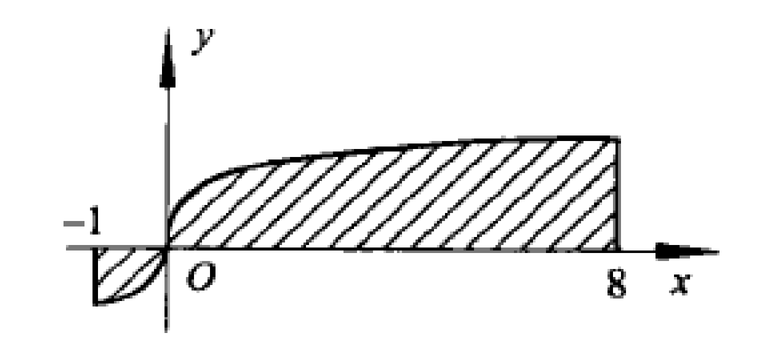


图 4.2

解 $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8}=11\frac{1}{4}$ （图 4.2）.

【2207】 $\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2$ （图 4.3）.

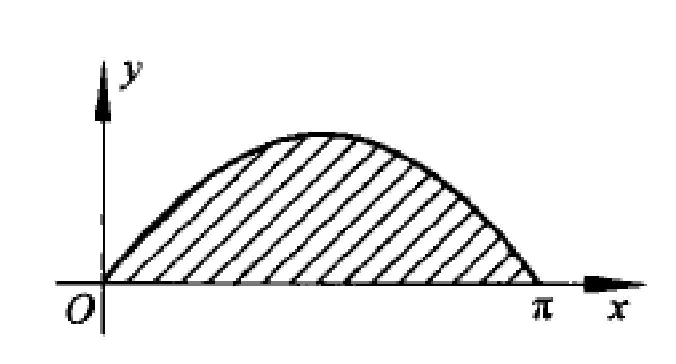


图 4.3

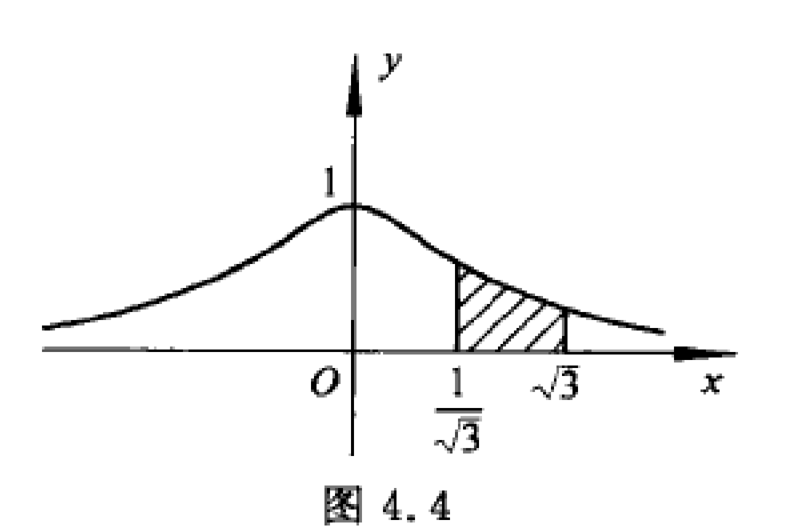


图 4.4

【2208】 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ （图 4.4）.

【2209】 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}$ （图 4.5）.

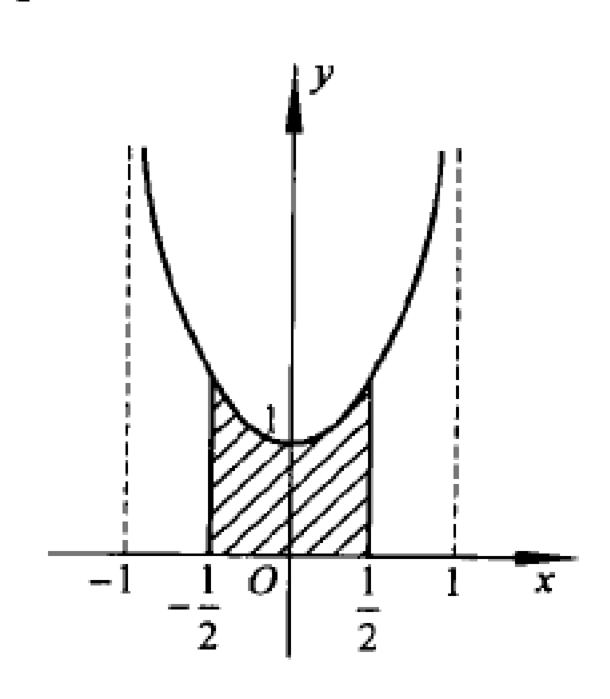


图 4.5

* 本节个别题是收敛的广义积分，仍按此公式计算. ——《题解》作者注.

【2210】 $\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_{\text{sh}1}^{\text{sh}2}=\text{arsh}x\Big|_{\text{sh}1}^{\text{sh}2}=1$. （图 4.6）.

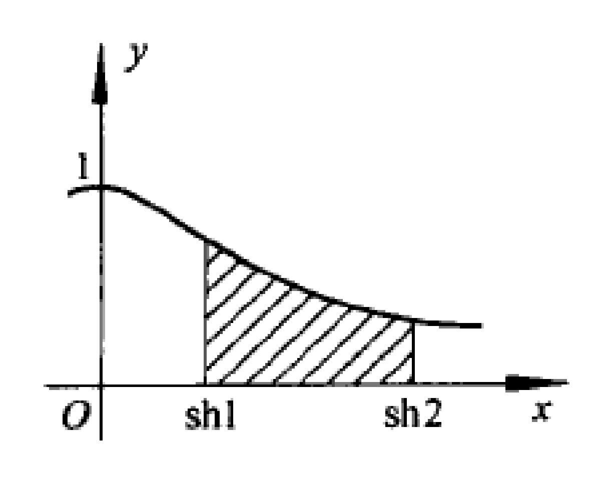


图 4.6

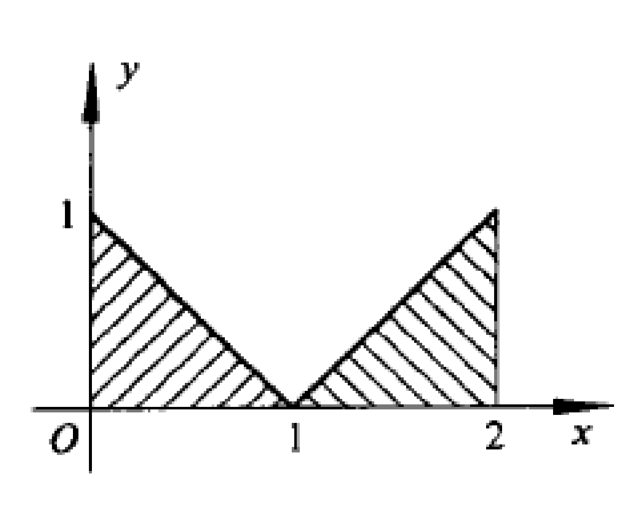


图 4.7

【2211】 $\int_0^2 |1-x|dx$.

解 $\int_0^2 |1-x|dx=\int_0^1(1-x)dx-\int_1^2(1-x)dx=1$ （图 4.7）.

【2212】 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2}+\arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ （图 4.8）.

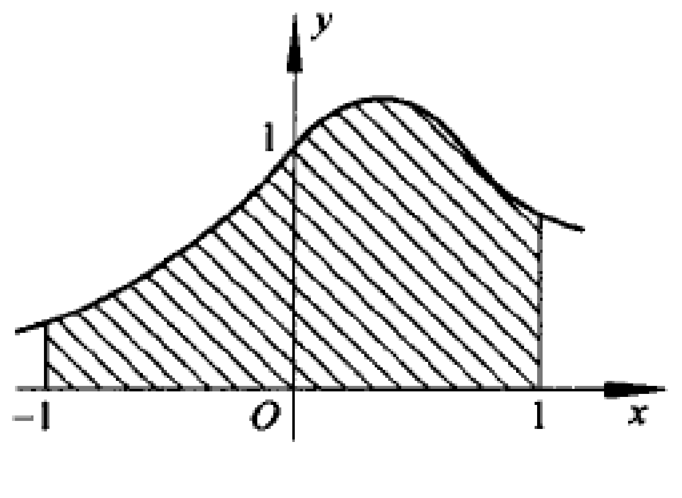


图 4.8

注 以下图形从略.

【2213】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

解 令 $\tan\frac{x}{2}=t$，并记 $a=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$，则有

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{(1+\varepsilon)a}\int\frac{d(at)}{1+(at)^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(a\tan\frac{x}{2}\right)+C,$$

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\arctan\left(a\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi-0}+\arctan\left(a\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi+0}^{2\pi-0}\right]=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

【2214】 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1,|b|<1,\ ab>0)$.

解 在公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right|+C^{*)}$$

中，设 $Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)$，两端求导数，得

$$Ax+\frac{B}{2}=-b(1-2ax+a^2)-a(1-2bx+b^2).$$

由此推得，当 $x=1$ 时，在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2-b(1-a)^2+2\sqrt{ab}(1-a)(1-b)=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

而当 $x=-1$ 时，得到值 $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$. 于是，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

*） 利用 1850 题的结果.

【2215】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$.

提示 利用 2030 题的结果.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{|ab|}\arctan\left(\frac{|a|\tan x}{|b|}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}*)}=\frac{\pi}{2|ab|}$

*） 利用 2030 题的结果.

【2216】 对于下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$； (2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x dx}{2+\tan^2 x}$； (3) $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)dx$.

说明为什么运用牛顿—莱布尼茨公式会得到不正确的结果.

解 (1) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1}=-2<0.$$

这是不正确的.事实上,由于函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}>0$,所以,当积分存在时,其值必大于零.原因在于该函数在区间$[-1,1]$上有第二类不连续点 $x=0$.因而,不能运用公式.

(2) 若应用公式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x dx}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

但$\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}>0$,故积分若存在,必为正.原因在于原函数在$[0,2\pi]$上 $x=\frac{\pi}{2}$,$x=\frac{3\pi}{2}$为第一类不连续点,故不能直接运用公式.

(3) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)dx=\arctan\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}>0.$$

这是不正确的.因为$\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1+x^2}<0$.所以,积分值必为负.原因在于原函数 $\arctan\frac{1}{x}$在 $x=0$ 为第一类不连续点,故不能直接运用公式.

【2217】 求 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$.

解 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx+\int_0^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_0^{1}=\frac{2}{3}.$$

注意 被积函数$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$显然在 $x=0$ 不连续,但易知

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0,$$

故 $x=0$ 是可去不连续点.若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0,则被积函数在整个$[-1,1]$上都是连续的,从而,积分 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ 存在.以后,凡是被积函数有可去不连续点的情形,我们都按此法处理,理解为连续函数的积分,另外,

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

应理解为 $$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{-\eta}=\frac{1}{3}.$$

以后，凡是定积分存在而原函数有不连续点的情况，都按此理解，省去取极限的式子，但应理解为取极限的结果.

【2218】 求 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x$.

提示 在每一个区间$[(k-1)\pi,k\pi]$ $(k=1,2,\cdots,100)$上积分，再相加.

解 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2x}\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2x}\,\mathrm{d}x=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=200\sqrt{2}.$

利用定积分求下列和的极限值：

【2219】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 这是和的极限，该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间$[0,1]$上的定积分. 事实上，函数 $f(x)=x$ 在$[0,1]$上是连续的. 因而可积分. 这样便可将$[0,1]$$n$ 等分，并取 ξ_i 为小区间的左端点，这样作出的和的极限就是题中所要求的极限. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

以下各题不再说明.

【2220】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2.$

【2221】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

【2222】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$

【2223】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\frac{1}{n}=\int_0^1x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$

【2224】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$

【2225】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\ln i\right)-n\ln n\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x^{*)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}x(\ln x-1)\Big|_{\varepsilon}^{1}=-1,$$

从而， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

*） 参看后面 2388 题.

【2226】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]=\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

弃掉高阶无穷小量，求下列和的极限值：

【2227】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

解 由于对一切 $k<n,3<n$ 有

$$0\leqslant\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant\tan\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant\tan\frac{k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n^2}}{\cos\frac{k\pi}{n^2}}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)\leqslant\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

从而， $0\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\leqslant2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\to0\quad(n\to+\infty)$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{k^2\pi}{n^2}\right)=\int_0^1\pi(x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6}.$$

【2228】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

解 由于 $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$，式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

【2229】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0)$.

解 由于

$$0\leqslant\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}-\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-\left(x+\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}+\left(x+\frac{k}{n}\right)}\leqslant\frac{1}{2x}\left(x+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n},$$

故

$$0\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2xn^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4x}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\to0\quad(n\to\infty)$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(x+t)\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}.$$

【2230】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解 由于 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{k}}=\dfrac{1}{n(nk+1)}<\dfrac{1}{n^2}$，故

$$0<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}<\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

于是，$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}\cdot 2^{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}.$$

【2231】 求：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x=0$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\displaystyle\int_b^a \sin x^2\,\mathrm{d}x=-\sin a^2$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x=\sin b^2$.

【2232】 求：(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$； (3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=2x\sqrt{1+x^4}$；

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin x)}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos x)}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)^{*)}=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

*) $\cos(\pi\cos^2 x)=\cos(\pi-\pi\sin^2 x)=-\cos(\pi\sin^2 x)$.

【2233】 求：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos x^2\,\mathrm{d}x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$； (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x}$.

提示 利用洛必达法则及变上限积分的求导法则.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos x^2\,\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{\pi^2}{4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

【2234】 证明：当 $x\to\infty$ 时，$\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\sim\dfrac{1}{2x}\mathrm{e}^{x^2}$.

提示 利用洛必达法则及变上限积分的求导法则.

证 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1$，所以，当 $x\to\infty$时，$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

【2235】 求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{\tan(\sin x)}\,(\sin x)'}{\sqrt{\sin(\tan x)}\,(\tan x)'}=\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x}\,\dfrac{\sin x}{\tan x}\,\dfrac{\tan x}{\sin x(\tan x)}}\;\lim\limits_{x\to+0}\cos^3 x=1.$

【2236】 设 $f(x)$为连续正值函数，证明：当 $x\geqslant0$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

递增.

证 首先注意，$\lim\limits_{x\to0+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定$\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$是 $x\geqslant0$ 上的连续函数. 因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt\right\}=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt>0$$

$(x>0)$，

所以，当 $x\geqslant0$ 时，函数 $\varphi(x)$递增.

【2237】 求：

(1) $\int_0^2 f(x)dx$，设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant2;\end{cases}$ (2) $\int_0^1 f(x)dx$，设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t\dfrac{1-x}{1-t}, & t\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$

解 (1) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=\dfrac{5}{6}$.

(2) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^t xdx+\int_t^1 t\dfrac{1-x}{1-t}dx=\dfrac{t}{2}$.

【2238】 计算下列积分，并作出这些积分对参数 α 的函数关系 $I=I(\alpha)$的图像：

(1) $I=\int_0^1 x|x-\alpha|dx$； (2) $I=\int_0^\pi\dfrac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$； (3) $I=\int_0^\pi\dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

解题思路 (1)分别就 $\alpha<0$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$ 及 $\alpha>1$ 三种情况求积分.

(2)分别就 $|\alpha|\leqslant1$ 及 $|\alpha|>1$ 两种情况求积分，其中当 $|\alpha|>1$ 时还要利用 2028 题(1)的结果.

(3)分别就 $|\alpha|\leqslant1$ 及 $|\alpha|>1$ 求积分.

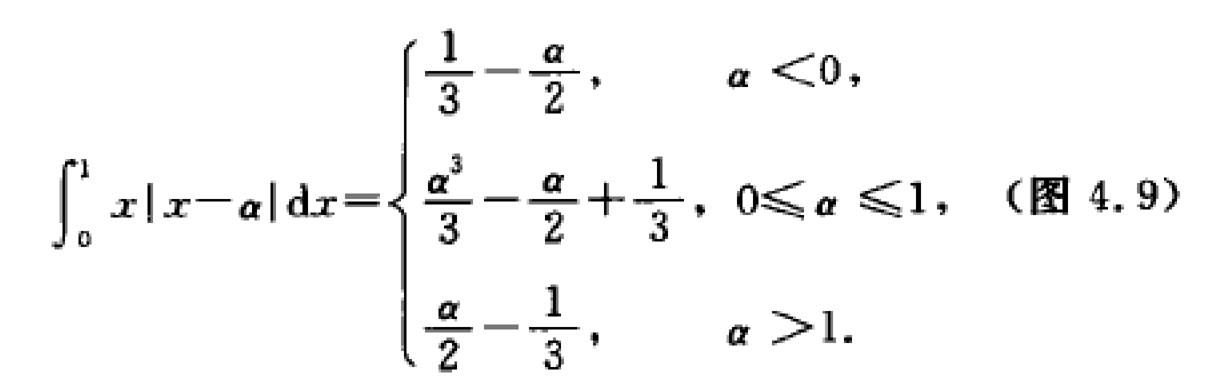
解 (1)分三种情况：

(ⅰ) 若 $\alpha<0$，则 $I=\int_0^1 x(x-\alpha)dx=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\alpha}{2}$；

(ⅱ) 若 $\alpha>1$，则 $I=\int_0^1 x(\alpha-x)dx=\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{3}$；

(ⅲ) 若 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，则 $I=\int_0^\alpha x(\alpha-x)dx+\int_\alpha^1 x(x-\alpha)dx=\dfrac{\alpha^3}{3}-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{3}$.

于是，



$$\int_0^1 x|x-\alpha|\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{\alpha}{2}, & \alpha<0,\\ \dfrac{\alpha^3}{3}-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant\alpha\leqslant1,\\ \dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{3}, & \alpha>1.\end{cases}\quad(\text{图 4.9})$$

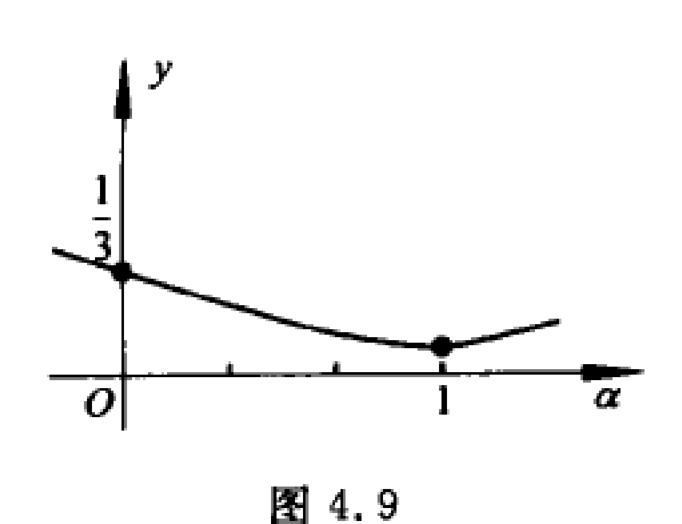


图 4.9

(2) 分两种情况:

(ⅰ) 若 $|\alpha|\leqslant1$,则

$$I=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi\frac{4\alpha^2(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi\frac{[(1+\alpha^2)^2-4\alpha^2\cos^2 x]+[4\alpha^2-(1+\alpha^2)^2]}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi[(1+\alpha^2)-2\alpha\cos x]\mathrm{d}x-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}[(1+\alpha^2)x-2\alpha\sin x]\Big|_0^\pi-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\tan\frac{x}{2}\right)^{*)}\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2}.$$

(ⅱ) 若 $|\alpha|>1$,则同上述情况类似有

$$I=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha^2-1}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha^2}.$$

于是,
$$\int_0^\pi\frac{\sin^2 x\mathrm{d}x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |\alpha|\leqslant1,\\ \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & |\alpha|>1.\end{cases}\quad(\text{图 4.10})$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

(3)
$$\int_0^\pi\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\Big|_0^\pi=\begin{cases}2, & |\alpha|\leqslant1,\\ \dfrac{2}{|\alpha|}, & |\alpha|>1.\end{cases}\quad(\text{图 4.11})$$

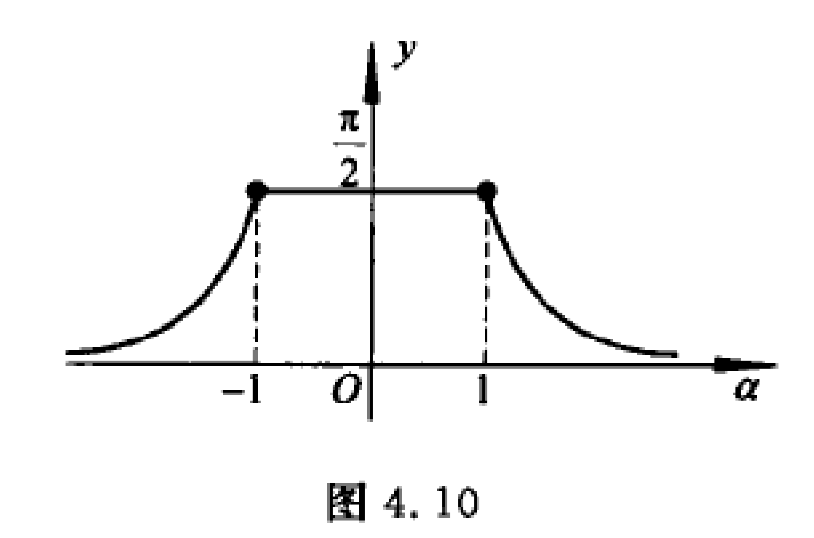


图 4.10

图 4.11

利用分部积分法公式,求下列定积分:

【2239】 $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^{\ln2}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\ln2}x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\ln2}+\int_0^{\ln2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln2-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\ln2}=-\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}}{2}.$

【2240】 $\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=\pi.$

【2241】 $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x = 2\left(x\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x\right) = 4\pi$.

【2242】+ $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x|\,\mathrm{d}x$.

提示 将区间$[\frac{1}{e},e]$分成$[\frac{1}{e},1]$及$[1,\frac{1}{e}]$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x|\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\lg x)\mathrm{d}x + \int_1^e \lg x\mathrm{d}x = \left(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{\ln 10}\mathrm{d}x\right) + x\lg x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{\ln 10}\mathrm{d}x$

$= 2(1-\frac{1}{e})\lg e$.

【2243】 $\int_0^1 \arccos x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 \arccos x\mathrm{d}x = x\arccos x\Big|_0^1 + \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} = 1$.

【2244】+ $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\arctan\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3}$

$= 2\arctan\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

利用适当的变量代换，求下列定积分：

【2245】 $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$.

解 设$\sqrt{5-4x}=t$，则 $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = -\int_3^1\frac{5-t^2}{8}\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$.

【2246】 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

【2247】 $\int_0^{0.75}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

提示 令$\frac{1}{x+1}=t$.

解 设 $t=\frac{1}{x+1}$，则

$$\int_0^{0.75}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2t^2-2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(2t-1+\sqrt{4t^2-4t+2})\int_{\frac{4}{7}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7}+\sqrt{\frac{50}{49}}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+7\sqrt{2}}{1+5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

【2248】 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt{e^x-1}=t$，则

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=2\int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

【2249】 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=(\arcsin t)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}.$$

【2250】 令 $x-\frac{1}{x}=t$，计算积分 $\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

解 由于被积函数是偶函数，于是，

$$\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\lim_{N\to-\infty}2\int_N^0\frac{dt}{t^2+2}=\lim_{N\to-\infty}\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_N^0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【2251】 对于下列定积分和代换 $x=\varphi(t)$：

(1) $\int_{-1}^1 dx$，$t=x^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}$，$x=\frac{1}{t}$；　　(3) $\int_0^\pi\frac{dx}{1+\sin^2 x}$，$\tan x=t$.

说明为什么用 $\varphi(t)$代换 x 会引致不正确的结果.

解 (1) $\int_{-1}^1 dx=2$. 但若作代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$，则得

$$\int_{-1}^1 dx=\pm\frac{3}{2}\int_1^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt=0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(2) $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{2}$. 但若作代换 $x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果：$\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=0$. 其错误在于 $x=\frac{1}{t}$，当$t=0$ (0 属于$[-1,1]$)时不连续.

(3) $\int_0^\pi\frac{dx}{1+\sin^2 x}$大于零，但若作代换 $t=\tan x$，则得

$$\int_0^\pi\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^\pi=0.$$

其错误在于 $t=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$处不连续.

【2252】 在积分 $\int_0^3 x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ 中，令 $x=\sin t$ 是否可以？

提示 不可以.

解 不可以. 因为 $\sin t=x$ 不可能大于 1.

【2253】 若在积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ 中作变量代换 $x=\sin t$ 时，可否取数 π 和$\frac{\pi}{2}$作为新的积分上下限？

提示 可以. 因为满足定积分换元的条件.

解 可以. 因为满足定积分换元的条件. 事实上，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,d(\sin t)=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,dt=-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi=\frac{\pi}{4}.$$

【2254】 证明：若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$内连续，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx.$$

提示 令 $x=a+(b-a)t$.

证 设 $x=a+(b-a)t$，则 $\mathrm{d}x=(b-a)\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]\mathrm{d}t,\quad \text{即}\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x.$$

【2255】 证明等式： $\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

提示 令 $x=\sqrt{t}$.

证 设 $x=\sqrt{t}$，则

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\mathrm{d}t,\quad \text{即}\quad \int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x.$$

【2256】 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A,B]\supset[a,b]$ 上的连续函数，当 $[a-x,b-x]\subset[A,B]$ 时，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y$.

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a+x}^{b+x} f(y)\mathrm{d}y=f(b+x)-f(a+x)$.

【2257】 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

提示 (1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$. (2) 令 $x=\pi-t$.

证 (1) 设 $\frac{\pi}{2}-t=x$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，且 $f(\sin x)=f(\cos t)$. 代入得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t,$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $\pi-t=x$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，且 $xf(\sin x)=(\pi-t)f(\sin t)$. 代入得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^0 (\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t,$$

即
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

【2258】 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-l,l]$ 上连续，则

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数时， $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数时， $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=0$.

给出这些事实的几何解释.

提示 (1)令 $x=-t$. (2)同(1).

证 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(x)=f(-x)$，$(x\in[-l,l])$. 于是，设 $x=-t$，则有

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-l}^{0} f(-x)\mathrm{d}(-x)+\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{l}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{l} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x.$$

其几何解释如下：

由于 $f(x)=f(-x)$，故它的图像关于 Oy 轴对称. 于是，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=-l$ 及 $x=l$ 所围成的面积为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=0$ 及 $x=l$ 所围成的面积 S 的两倍(图 4.12).

(2) 由于 $f(x)=-f(-x)$，设 $x=-t$，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-l}^{0} f(-x)\mathrm{d}x+\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x=\int_{l}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{l} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

其几何解释如下：

由于 $f(x)=-f(-x)$，故它的图像关于原点对称. 于是，由 $-l$ 到 0 之间所围之面积，与由 0 到 l 之间所围成之面积绝对值相等，符号相反，故其面积的代数和为零(图 4.13).

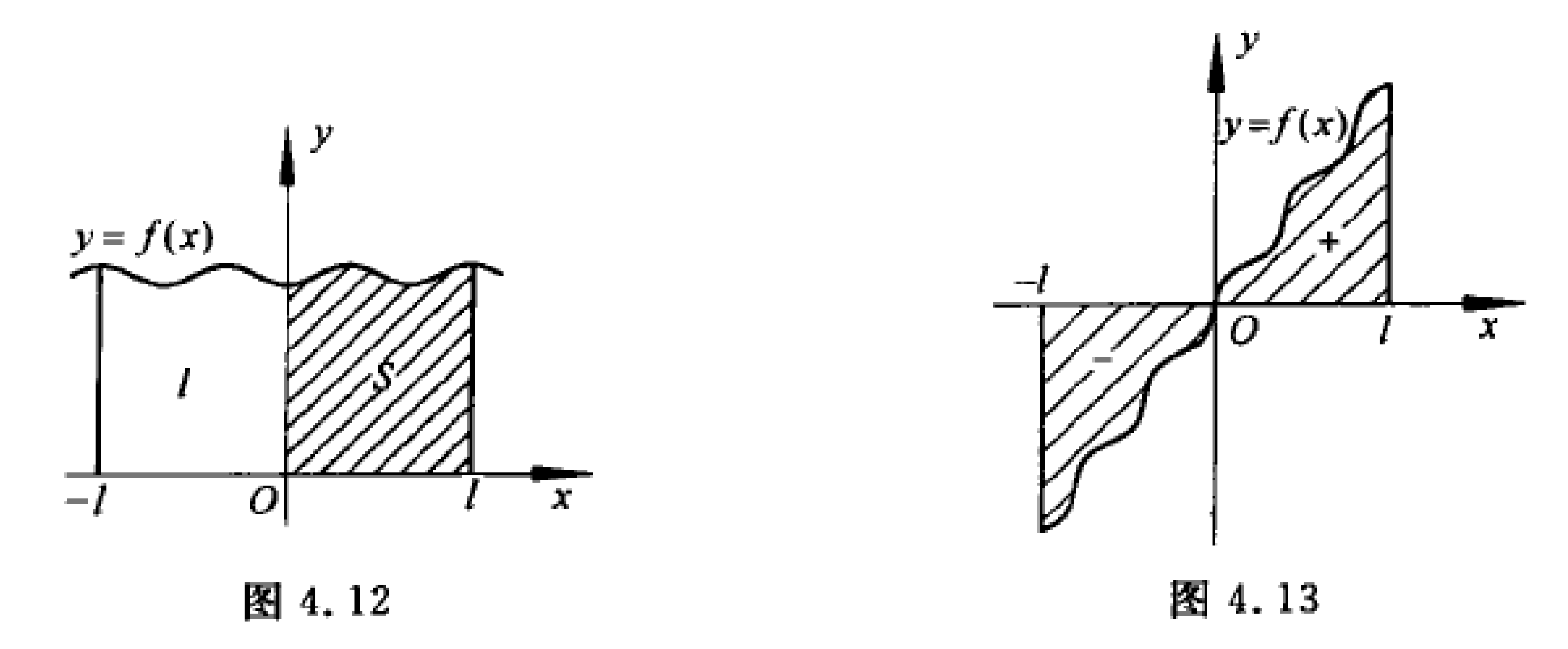


图 4.12　　　　图 4.13

【2259】 证明：偶函数的原函数中的一个为奇函数，而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

证 设 $f(x)$在$[-l,l]$上定义*)，且 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数. 当$f(-x)=f(x)$时，由于

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)\quad 及\quad f(-x)=-\frac{d}{dx}F(-x),$$

故有$\frac{d}{dx}[F(x)+F(-x)]=0$. 从而可得 $F(x)+F(-x)=C_1$，且 $C_1=2F(0)$. 于是，$f(x)$有一个原函数 $F(x)-F(0)$是奇函数.

当 $f(-x)=-f(x)$时，类似地可得 $F(x)-F(-x)=C_2$，且 $C_2=0$. 于是，$F(-x)=F(x)$，即 $f(x)$的任一原函数$F(x)+C$ (C 为任意常数)也为偶函数.

*） 如果 $f(x)$在$[-l,l]$上可积，则由 $F_c(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ (C 是任意常数) 也可获证，其中 $F_c(x)$ 为 $f(x)$的全部原函数.

【2260】 引入新变量 $t=x+\frac{1}{x}$，计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

解 设 $t=x+\frac{1}{x}$，则 $\qquad t^2-4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2,\quad x=\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})$.

于是，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_1^2\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})e^t d\left[\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2-4})\right]+\int_{\frac{5}{2}}^{2}(1-\sqrt{t^2-4})e^t d\left[\frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2-4})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt-\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1-\sqrt{t^2-4})e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}e^t\left[\sqrt{t^2-4}+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right]dt=\int_2^{\frac{5}{2}}\left[\sqrt{t^2-4}\,d(e^t)+e^t d\sqrt{t^2-4}\right]$$

$$=(\sqrt{t^2-4})e^t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

【2261】 在积分 $\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx$ 中进行变量代换 $\sin x=t$.

解 $\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos x dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}f(x)\cos x dx.$

在右端的第一个积分中，设$\sin x=t$；第二、第三个积分中，设$\sin(\pi-x)=t$；第四个积分中，设$\sin(2\pi-x)=-t$. 代入得

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^1 [f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\mathrm{d}t+\int_{-1}^0 [f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\mathrm{d}t.$$

【2262】 计算积分 $\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x$ (n 为正数).

提示 令 $x=e^{-t}$.

解 $\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设 $x=e^{-t}$,则 $\mathrm{d}x=-e^{-t}\mathrm{d}t$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x}=\frac{\sin t}{e^{-t}}=e^t\sin t$. 代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x=\int_0^{2n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2\cdot 2n=4n.$$

【2263】 求积分 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

提示 利用 2257 题(2)的结果.

解 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x^{*)}=\frac{\pi}{2}[-\arctan(\cos x)]\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$.

*) 利用 2257 题(2)结果.

【2264】 设 $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$,求积分 $\int_{-1}^3\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

提示 参看 2217 题后面所加的注意.

解
$$\begin{aligned}\int_{-1}^3\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x&=\int_{-1}^0\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x\\&=\arctan f(x)\Big|_{-1}^0+\arctan f(x)\Big|_0^2+\arctan f(x)\Big|_2^3\\&=\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)^{*)}+\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\arctan\frac{4^2\cdot 2}{3^3\cdot 1}-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\arctan\frac{32}{27}-2\pi.\end{aligned}$$

*) 参看 2217 题后的注意.

【2265】 证明:若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty<x<+\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数,则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

式中 a 为任意的数.

提示 将区间 $[a,a+T]$ 分成 $[a,0]$、$[0,T]$ 及 $[T,a+T]$,并在积分 $\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ 中,令 $x=t+T$.

证

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

对上述等式右端的第三个积分,设 $x-T=t$,则

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

于是,
$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

【2266】 证明:当 n 为奇数时,函数

$$F(x)=\int_0^x \sin^n x\mathrm{d}x \quad 及 \quad G(x)=\int_0^x \cos^n x\mathrm{d}x$$

为以 2π 为周期的周期函数;而当 n 为偶数时,则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数之和.

证 当 n 为奇数时,$\sin^n x$ 是奇函数,而且是以 2π 为周期的函数. 于是,

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{2\pi+x}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{x}\sin^n(\pi-x)\mathrm{d}x+\int_0^x\sin^n x\mathrm{d}x=0+\int_0^x\sin^n x\mathrm{d}x=F(x)$$

及
$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x$$
$$=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos^n(x+\pi)\mathrm{d}x=G(x),$$

从而得知：$F(x)$和 $G(x)$都是以 2π 为周期的周期函数. 当 n 为偶数时，显然有
$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x,\quad G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x.$$

但因
$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=a>0,$$

所以，$F(x)$和 $G(x)$都不是以 2π 为周期的周期函数.

设 $F_1(x)=F(x)-\frac{a}{2\pi}x$，则
$$F_1(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{a}{2\pi}(x+2\pi)=F(x)+a-\frac{a}{2\pi}x-a=F(x)-\frac{a}{2\pi}x=F_1(x).$$

即 $F_1(x)$是以 2π 为周期的周期函数，而
$$F(x)=F_1(x)+\frac{a}{2\pi}x.$$

所以，$F(x)$为周期函数与线性函数之和.

同理，可以证明 $G(x)$也是周期函数与线性函数之和.

一般地，当 $f(x)$为周期函数时，可以证明：函数 $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与周期函数之和.

【2267】 证明：若 $f(x)$为以 T 为周期的连续的周期函数，则函数
$$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x$$
在一般的情形下是线性函数与周期等于 T 的周期函数之和.

证明思路 *注意*
$$F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\mathrm{d}x=K\quad(K\text{ 为常数}).$$

当 $K=0$ 时，则 $F(x)$为一周期函数. 当 $K\neq0$ 时，可令 $\varphi(x)=F(x)-\frac{K}{T}x$，只要证明 $\varphi(x)$是以 T 为周期的周期函数.

证 因为 $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x$，所以，
$$F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T}f(x)\mathrm{d}x.$$

又因 $f(x)$是一周期为 T 的连续函数，所以，
$$\int_x^{x+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\mathrm{d}x=K.$$

于是，$F(x+T)-F(x)=K$.

如果 $K=0$，则 $F(x)$为周期等于 T 的周期函数.

如果 $K\neq0$，可考虑函数 $\varphi(x)=F(x)-\frac{K}{T}x$，则因
$$\varphi(x+T)=F(x+T)-\frac{K}{T}(x+T)=F(x+T)-\frac{K}{T}x-K=F(x)-\frac{K}{T}x=\varphi(x),$$

所以，$\varphi(x)$为以 T 为周期的周期函数，从而，$F(x)=\varphi(x)+\frac{K}{T}x$，即 $F(x)$是线性函数与周期等于 T 的周期函数之和.

计算下列积分：

【2268】 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\mathrm{d}x=-\frac{1}{26}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1=315\frac{1}{26}$.

【2269】 $\int_{-1}^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

解 $\int_{-1}^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

【2270】+ $\int_1^e (x\ln x)^2\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^e (x\ln x)^2\mathrm{d}x=x^3\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e x^2\ln x(1+\ln x)\mathrm{d}x=e^3-2\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x-2\int_1^e (x\ln x)^2\mathrm{d}x$.

移项合并得 $\int_1^e (x\ln x)^2\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{2}{9}x^3\ln x-\frac{2}{27}x^3\right)\Big|_1^e=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$.

【2271】 $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$.

提示 令 $\sqrt[3]{1-x}=t$.

解 设 $\sqrt[3]{1-x}=t$，则 $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x=-3\int_0^{-2}(t^3-t^6)\mathrm{d}t=-66\frac{6}{7}$.

【2272】+ $\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

提示 令 $x=\frac{1}{t}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\frac{\pi}{3}$.

【2273】 $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$.

提示 令 $1+3x^8=t$.

解 设 $1+3x^8=t$，则 $24x^7\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，$x^8=\frac{1}{3}(t-1)$. 于是，

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{72}\int_1^4 (t-1)t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{29}{270}.$$

【2274】 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

提示 使用分部积分法后，再令$\sqrt{x}=t$.

解 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{2(1+x)}=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ *)

$$=\pi-(t-\arctan t)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

*) 设$\sqrt{x}=t$.

【2275】 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{2-\cos x}-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$

$=4\int_0^{\pi}\frac{dx}{4-\cos^2x}-6\int_0^{\pi}\frac{dx}{9-\cos^2x}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4\sin^2x+3\cos^2x}-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{9\sin^2x+8\cos^2x}$

$=8\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-12\frac{1}{3\sqrt{8}}\arctan\frac{3\tan x}{\sqrt{8}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

【2276】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}.$

提示 注意 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$，并利用 2035 题的结果.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}.$

*) 利用 2035 题的结果.

【2277】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx.$

提示 同 1167 题.

解 $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin 2x=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x).$

于是，$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx=\left(-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}.$$

【2278】 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx.$

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x^2}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$

【2279】 $\int_0^{\pi}e^x\cos^2x\,dx.$

提示 注意 $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$，并利用 1828 题的结果.

解 $\int_0^{\pi}e^x\cos^2x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{e^x(1+\cos 2x)}{2}dx=\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{10}(\cos 2x+2\sin 2x)^{*)}\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{5}(e^{\pi}-1).$

*) 利用 1828 题的结果.

【2280】 $\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4x\,dx.$

提示 利用 1761 题的结果.

解 $\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4x\,dx=\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2x(\operatorname{ch}^2x-1)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 2x\,dx-\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2x\,dx$

$=\frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}-\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1042}.$

*) 利用 1761 题的结果.

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分：

【2281】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nx\,dx.$

提示 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$

解 $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2x\mathrm{d}x$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x,$

移项合并得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1.\end{cases}$$

【2282】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x.$

提示 令$\frac{\pi}{2}-x=t$,并利用 2281 题的结果.

解 设$\frac{\pi}{2}-x=t$,则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,且 $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$.

代入得 $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t.$$

因此,与 2281 题的结果相同.

【2283】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\mathrm{d}x.$

提示 $I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\mathrm{d}(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1},$

即 $$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$$

由于 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,于是,利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=\cdots=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^nI_0$$
$$=(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right].$$

【2284】 $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x.$

提示 令 $x=\sin t$,并利用 2282 题的结果.

解 设 $x=\sin t$,代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

【2285】 $I_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 设 $x=\sin t$,代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t.$$

因此,与 2281 题的结果相同.

【2286】 $I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x.$

提示　$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$.

解　$I_n=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\ln^n x\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$,

于是，
$$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+1}\right)I_0=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

【2287】　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}\mathrm{d}x$.

提示　注意 $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 及 $I_n=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}$.

解　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sec^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left[\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-I_{n-1}=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}$,

即 $I_n=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}$. 递推之，得

$$I_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n-2)}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2}+(-1)^n I_0.$$

但
$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=-\ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-\ln\sqrt{2},$$

于是，
$$I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}.$$

设 $f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ 是实变量 x 的复函数，其中 $f_1(x)=\mathrm{Re}f(x)$，$f_2(x)=\mathrm{Im}f(x)$ 及 $\mathrm{i}^2=-1$，则按定义有：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int f_2(x)\mathrm{d}x.$$

显然，
$$\mathrm{Re}\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{Re}f(x)\mathrm{d}x.\qquad \mathrm{Im}\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{Im}f(x)\mathrm{d}x.$$

【2288】　利用欧拉公式　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，

证明：
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 2\pi, & m=n\end{cases}\quad (n\text{ 及 }m\text{ 为整数}).$$

证　当 $m=n$ 时，$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x=2\pi$.

当 $m\neq n$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)(\cos mx-\mathrm{i}\sin mx)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{2\pi}\cos(m-n)x\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\sin(m-n)x\mathrm{d}x=0.$$

【2289】　证明：$\int_a^b\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{b(\alpha+\mathrm{i}\beta)}-\mathrm{e}^{a(\alpha+\mathrm{i}\beta)}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}$　(α 及 β 为常数).

证　$\int_a^b\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x+\mathrm{i}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)]}{\alpha^2+\beta^2}\Big|_a^b$

$=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha-\mathrm{i}\beta)(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)}{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\alpha-\mathrm{i}\beta)}\Big|_a^b=\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}\Big|_a^b=\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)b}-\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}$.

利用欧拉公式：$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$，$\sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$，计算下列积分（$m$ 及 n 为正整数）：

【2290】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$.

解 方法 1：记
$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx,$$
易见 $I_0=\frac{1}{4}I$，其中
$$I=\int_0^{2\pi} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx.$$
利用欧拉公式，有
$$\begin{aligned}\sin^{2m}x\cos^{2n}x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2m}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}\\ &=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kC_{2m}^k e^{2(m-k)ix}\sum_{l=0}^{2n}C_{2n}^l e^{2(n-l)ix}\\ &=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^kC_{2m}^kC_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix}\\ &=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^kC_{2m}^kC_{2n}^l[\cos2(m+n-k-l)x+i\sin2(m+n-k-l)x],\end{aligned}$$
今不妨设 $m\leqslant n$*，作积分计算，则有
$$\begin{aligned}I &=\frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^kC_{2m}^kC_{2n}^l\left(\int_0^{2\pi}\cos2(m+n-k-l)x\,dx+i\int_0^{2\pi}\sin2(m+n-k-l)x\,dx\right)\\ &=\frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum_{\substack{k+l=m+n\\ 0\leqslant k\leqslant 2m\\ 0\leqslant l\leqslant 2n}}(-1)^kC_{2m}^kC_{2n}^l=\frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kC_{2m}^kC_{2n}^{m+n-k}\end{aligned}$$
经计算，可以验证有**
$$(-1)^m\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kC_{2m}^kC_{2n}^{m+n-k}=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$
于是，得
$$I_0=\frac{1}{4}I=\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

方法 2：令 $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$. 显然有
$$I_{m,0}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$
$$\begin{aligned}I_{m,n} &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n-1}x\,d(\sin x)=\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}x\,d(\sin^{2m+1}x)\\ &=\frac{1}{2m+1}\cos^{2n-1}x\sin^{2m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,d(\cos^{2n-1}x)\\ &=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2}x\cos^{2n-2}x\,dx=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x(1-\cos^2x)\cos^{2(n-1)}x\,dx\\ &=\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n-1}-\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n},\end{aligned}$$
整理后得
$$I_{m,n}=\frac{2n-1}{2(m+n)}I_{m,n-1}.$$
由此不难得到
$$I_{m,n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}I_{m,0}=\frac{(2n-1)!!m!}{2^n(m+n)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

---

* 若 $m>n$ 作代换 $x=\frac{\pi}{2}-u$ 即得.

** 用 $C_{2m}^kC_{2n}^{m+n-k}=C_{2m}^mC_{2n}^n(C_{m+n}^m)^{-2}C_{m+n}^kC_{m+n}^{2m-k}$，以及由恒等式 $(1-x)^{m+n}(1+x)^{m+n}=(1-x^2)^{m+n}$ 展开，取 x^{2m} 的系数的关系式 $\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kC_{m+n}^kC_{m+n}^{2m-k}=(-1)^mC_{m+n}^m$ 可以验证.

$$=\frac{\pi(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n+1}(m+n)!}=\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

【2291】 $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx.$

解 设 $u=\frac{\sin nx}{\sin x}$，利用欧拉公式得 $\quad u=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}.$

当 $n=2k$ 时，

$$\begin{aligned}u&=(e^{ikx}+e^{-ikx})(e^{i(k-1)x}+e^{i(k-3)x}+\cdots+e^{-i(k-3)x}+e^{-i(k-1)x})\\&=e^{(2k-1)ix}+e^{(2k-3)ix}+\cdots+e^{ix}+e^{-ix}+\cdots+e^{-(2k-1)ix}\\&=2[\cos(2k-1)x+\cos(2k-3)x+\cdots+\cos x].\end{aligned}$$

于是， $$\int_0^\pi u dx=2\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}+\cdots+\sin x\right]\Bigg|_0^\pi=0.$$

当 $n=2k+1$ 时，同上得 $\quad u=2[\cos 2kx+\cos 2(k-1)x+\cdots+\cos 2x]+1,$

于是，$\int_0^\pi u dx=\pi.$

最后得到 $$\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \pi, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

【2292】 $\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx.$

解 $$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}=\frac{e^{i(2n+1)x}+e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix}+e^{-ix}}=e^{2nix}-e^{2(n-1)ix}+\cdots+(-1)^n+\cdots+e^{-2nix}$$
$$=2[\cos 2nx-\cos 2(n-1)x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos 2x]+(-1)^n.$$

于是， $$\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx=(-1)^n\pi.$$

【2293】 $\int_0^\pi \cos^n x\cos nx dx$

解 $$\cos^n x\cos nx=\frac{1}{2^{n+1}}(e^{ix}+e^{-ix})^n(e^{inx}+e^{-inx})=\frac{1}{2^n}[\cos 2nx+C_n^1\cos 2(n-1)x+\cdots+C_n^{n-1}\cos 2x+1].$$

于是， $$\int_0^\pi \cos^n x\cos nx dx=\frac{\pi}{2^n}.$$

【2294】 $\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx.$

解 解法 1：

$$\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\int_0^\pi\left[\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^k e^{i(n-2k)x}(e^{inx}-e^{-inx})\right]dx$$
$$=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^k\int_0^\pi e^{i(2n-2k)x}dx-\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^k\int_0^\pi e^{-i2kx}dx\right]$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}i^{n+1}}[(-1)^nC_n^n\pi-(-1)^0C_n^0\pi]=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{\pi}{2^n}(-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由于 $$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

于是， $$\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

解法 2：设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\sin\left(\frac{n\pi}{2}-nt\right)dt=\sin\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cos nt dt-\cos\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\sin nt dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

求下列积分（n 为正整数）：

【2295】 $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx.$

解 $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)\,dx$

$$=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos nx\,d(\sin x)-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^n x\,d(\cos nx)-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx=0.$$

【2296】 $\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx.$

提示 对积分 $\int_0^{\pi}\cos^{n+1}x\sin(n+1)x\,dx$ 使用两次分部积分.

解 考虑积分
$$I=\int_0^{\pi}\cos^{n+1}x\sin(n+1)x\,dx,$$
并对它作两次分部积分，可得
$$I=I-\frac{n}{n+1}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx.$$
于是，
$$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=0.$$

本题也可不用分部积分法. 事实上，$\cos^{n-1}x\sin(n+1)x$ 是以 π 为周期的函数，又是奇函数，于是，

$$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=0.$$

【2297】 $\int_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx.$

解 解法 1：
$$\cos^{2n}x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\left[C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\cos2(n-k)x\right]$$

于是，
$$I=\int_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx=\frac{1}{2^{2n}}\left\{C_{2n}^n\int_0^{2\pi}e^{-ax}\,dx+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\int_0^{2\pi}e^{-ax}\cos2(n-k)x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}C_{2n}^n e^{-ax}\Bigg|_0^{2\pi}+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{(2n-2k)\sin2(n-k)x-a\cos2(n-k)x}{a^2+(2n-2k)^2}e^{-ax}\Bigg|_0^{2\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}C_{2n}^n(e^{-2\pi a}-1)-a(e^{-2\pi a}-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2C_{2n}^k}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}a}\left\{C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\},$$

即
$$\int_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}a}\left\{C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}.$$

解法 2：由于
$$\int_0^{2\pi}e^{(\alpha+ik)x}\,dx=\frac{e^{(\alpha+ik)x}}{\alpha+ik}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\alpha+ik}=\frac{(e^{2\pi\alpha}-1)(\alpha-ik)}{\alpha^2+k^2},$$

取实部，得
$$\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{(\alpha+ik)x}\,dx=\frac{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}{\alpha^2+k^2}.$$

于是，
$$\int_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx=\int_0^{2\pi}e^{-ax}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi}e^{-ax}\left(\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k e^{i(2n-2k)x}\right)dx=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k\int_0^{2\pi}e^{-a+i(2n-2k)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}\frac{e^{-2\pi a}-1}{-a+i(2n-2k)}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}\frac{a(1-e^{-2\pi a})}{a^2+(2n-2k)^2}$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}a}\left[C_{2n}^{n}+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right].$$

【2298】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cos 2nx\mathrm{d}x.$

解 利用分部积分法，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}\sin 2nx\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=0^{*)}+\frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}\mathrm{d}x-\frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\mathrm{d}x.$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式：

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}=\frac{e^{i(2n-1)x}+e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix}+e^{-ix}}=2[\cos 2(n-1)x-\cos 2(n-2)x+\cdots+(-1)^{n-2}\cos 2x]+(-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}=2[\cos 2nx-\cos 2(n-1)x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos 2x]+(-1)^{n}.$$

由于积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2kx\mathrm{d}x$ （k 为任意的正整数）

的值恒等于零，所以，积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

分别等于$(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}$及$(-1)^n\frac{\pi}{2}$. 这样，我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{1}{4n}\left[(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}.$$

*） 在 $x=0$ 处，$\sin 2nx\ln\cos x=0$；而在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处，为“$0\cdot\infty$”型，采用洛必达法则定值：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin 2nx\ln\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x\sin^2 2nx}{\cos x\cos 2nx}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x\sin^2 nx+4n\sin x\sin 2nx\cos 2nx}{-\sin x\cos 2nx-2n\cos x\sin 2nx}=0.$$

【2299】 利用多次的分部积分法，计算欧拉积分：

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

式中 m 及 n 为正整数.

解 $B(m,n)=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1).$

继续利用分部积分法，可得

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

【2300】 勒让德多项式 $P_n(x)$ 可由下面公式来定义：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证明：
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

证 当 $m\neq n$ 时，不失一般性，设 $n<m$. 由于 $P_m(x)$ 为一 m 次的多项式，我们记
$$P_m(x)=R^{(m)}(x),$$
其中 $R(x)=\frac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m$. 利用多次分部积分法，得
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\left[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P_n'(x)R^{m-2}(x)+\cdots+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)\right]\Big|_{-1}^{1}+(-1)^m\int_{-1}^{1} R(x)P_n^{(m)}(x)\mathrm{d}x$$
$$=0.$$
当 $m=n$ 时，
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}\right]^2\mathrm{d}x,$$
设 $u=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^n-1)^n]$，$v=(x^2-1)^n$，则
$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\right]\Big|_{-1}^{1}+(-1)^n\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} vu^{(n)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}[(x^2-1)^n]\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t^{*)}$$
$$=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}^{**)}=\frac{2}{2n+1}.$$

*) 设 $x=\sin t$.

**) 利用 2282 题的结果.

【2301】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内除了有限个内点 $c_i(i=1,\cdots,p)$ 及点 a 与 b 外皆满足等式 $F'(x)=f(x)$，而在这些点上 $F(x)$ 有第一类不连续点（广义原函数）. 证明：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

证 为确定起见，设 $a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$，并记 $a=c_0$，$b=c_{p+1}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\sum_{i=1}^{p}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)\mathrm{d}x.$$
显然，在 $[c_i+\eta,c_{i+1}-\eta]$ 上 $F'(x)=f(x)$，从而可应用牛顿—莱布尼茨公式，得
$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)\mathrm{d}x=F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta),$$
由此可知
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]$$
$$=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

【2302】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，而 $F(x)=C+\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为 $f(x)$ 的不定积分. 证明：函数 $F(x)$ 连续，且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处成立等式
$$F'(x)=f(x),$$
问在函数 $f(x)$ 的不连续点处函数 $F(x)$ 的导数是什么？

解 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故必有界：$|f(x)|\leqslant M$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 因此，对任何 $x\in[a,b]$，有

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant M|\Delta x|\to 0\quad(\text{当 }\Delta x\to 0\text{ 时}).$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

现设 $f(\xi)$ 在点 $\xi=x$ 处连续. 于是,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $|\xi-x|<\delta$ 时,恒有 $|f(\xi)-f(x)|<\varepsilon$. 于是,当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{d}\xi\right|<\frac{1}{|\Delta x|}\varepsilon|\Delta x|=\varepsilon,$$

故 $F'(x)$ 存在,且

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

而在不连续点处 $F'(x)$ 可能存在也可能不存在. 例如,设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{1}{n},\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的可积性可仿 2194 题证明,而且显然有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

然而在点 $x=\dfrac{1}{n}$ 处,$F(x)=C$ 的导数 $F'(x)=0$ 是存在的.

但函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$,它在 $[-1,1]$ 上是可积的,且

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=|x|,$$

然而在 $x=0$ 点处,$F(x)=|x|+C$ 的导数 $F'(x)$ 不存在.

求下列有界不连续函数的不定积分:

【2303】 $\int \operatorname{sgn}x\mathrm{d}x$.

解 $\int \operatorname{sgn}x\mathrm{d}x=\int_0^x \operatorname{sgn}x\mathrm{d}x+C=|x|+C.$

【2304】 $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x$.

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积,故其原函数 $F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 对任何 x,必存在唯一的整数 k 使 $k\pi\leqslant x<(k+1)\pi$. 于是,

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos t)\Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x\\&=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos x)-\frac{\pi}{2}=\arccos(\cos x).\end{aligned}$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x=\arccos(\cos x)+C\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【2305】 $\int [x]\mathrm{d}x\quad(x\geqslant 0)$.

解
$$\begin{aligned}\int [x]\mathrm{d}x&=C+\int [x]\mathrm{d}x=C+\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1}x\mathrm{d}x+\int_{[x]}^x [x]\mathrm{d}x\\&=C+\sum_{k=0}^{[x]-1}k+[x](x-[x])=x[x]-\frac{[x]^2+[x]}{2}+C.\end{aligned}$$

【2306】 $\int x[x]\mathrm{d}x \quad (x\geqslant 0)$.

解 $\int x[x]\mathrm{d}x = C+\int_0^x x[x]\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} kt\,\mathrm{d}t+\int_{[x]}^x [x]t\,\mathrm{d}t+C$

$$= \sum_{k=0}^{[x]-1}\left(\frac{kt^2}{2}\Big|_k^{k+1}\right)+\frac{[x]t^2}{2}\Big|_{[x]}^x+C = \sum_{k=0}^{[x]-1}\left(k^2+\frac{k}{2}\right)+\frac{[x](x^2-[x]^2)}{2}+C$$

$$= \frac{([x]-1)[x](2[x]-1)}{6}+\frac{[x]([x]-1)}{4}+\frac{x^2[x]-[x]^3}{2}+C$$

$$= \frac{x^2[x]}{2}-\frac{6[x]^3-3[x]([x]-1)-2[x]([x]-1)(2[x]-1)}{12}+C$$

$$= \frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+C.$$

【2307】 $\int (-1)^{[x]}\mathrm{d}x$.

解 $\int (-1)^{[x]}\mathrm{d}x = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin\pi x)\mathrm{d}x+C = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)\Big|_0^{x*)}+C = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)+C.$

*） 利用 2304 题的结果.

【2308】 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<l,\\ 0, & |x|>l.\end{cases}$

解 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l f(x)\mathrm{d}x+\int_l^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l 1\mathrm{d}x+\int_l^x 0\mathrm{d}x = l \quad (x\geqslant l)$,

$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^x 1\mathrm{d}x = x \quad (|x|<l)$,

$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = -\int_x^{-l} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-l}^0 f(x)\mathrm{d}x = -l \quad (x\leqslant -l)$.

合并得
$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|).$$

计算下列有界不连续函数的定积分:

【2309】 $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\operatorname{sgn}(x-x^3)=\begin{cases}1, & x\in(0,1),\\ -1, & x\in(1,3].\end{cases}$

解 $\operatorname{sgn}(x-x^3)=\begin{cases}1, & x\in(0,1),\\ -1, & x\in(1,3].\end{cases}$

于是,
$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x-\int_1^3 \mathrm{d}x = -1.$$

【2310】 $\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x$.

提示 将区间[0,2]分成[0,ln2],[ln2,ln3],[ln3,ln4],…,[ln7,2].

解 $\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} 1\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\mathrm{d}x+\int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\ln 7}^2 7\mathrm{d}x$

$$=\ln 2+2(\ln 3-\ln 2)+3(\ln 4-\ln 3)+\cdots+7(-\ln 7+2)$$

$$=14-(\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln 7)=14-\ln 7!.$$

【2311】 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$.

提示 将区间[0,6]分成[0,1],[1,2],[2,3],…,[5,6].

解 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x = \int_1^2 \sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x+\int_2^3 2\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x+\cdots+\int_5^6 5\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x = \frac{30}{\pi}.$

【2312】 $\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x$.

提示　将区间$[0,\pi]$分成$[0,\frac{\pi}{2}]$及$[\frac{\pi}{2},\pi]$.

解　$\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{4}$.

【2313】 $\int_1^{n+1} \ln[x]\mathrm{d}x$,其中 n 为正整数.

提示　将区间$[1,n+1]$分成$[1,2],[2,3],[3,4],\cdots,[n,n+1]$.

解　$\int_1^{n+1} \ln[x]\mathrm{d}x=\int_2^3 \ln2\mathrm{d}x+\int_3^4 \ln3\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\ln n\mathrm{d}x=\ln n!$.

【2314】 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x$.

提示　注意原式$=\int_{e^{-\pi}}^1 (-1)\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k+1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x=\int_{e^{-\pi}}^1 (-1)\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k+1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}\mathrm{d}x$

$=-1+2e^{-\pi}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k-1}e^{-(k-1)\pi}=-1+\frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$.

【2315】 求$\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$,其中 E 为闭区间$[0,4\pi]$中使被积分式有意义的一切值的集合.

提示　E 中使被积函数有意义的区域为$[0,\pi]$及$[2\pi,3\pi]$;再将区间$[0,\pi]$分成$[0,\frac{\pi}{2}]$及$[\frac{\pi}{2},\pi]$,将区间$[2\pi,3\pi]$分成$[2\pi,\frac{5\pi}{2}]$及$[\frac{5\pi}{2},3\pi]$.

解　$\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x)\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x)\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}$.

§3. 中值定理

1° **函数的平均值**　数

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则可求得一点 $c\in(a,b)$,使得

$$M[f]=f(c).$$

2° **第一中值定理**　若:(1)函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上有界并可积;(2)当 $a<x<b$ 时,函数 $\varphi(x)$不变号,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

式中 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 且 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$;(3)此外,若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $\mu=f(c)$,其中 $a\leqslant c\leqslant b$ (作者注:可以证明,c 可取值使 $a<c<b$).

3° **第二中值定理**　若:(1)函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上有界并可积;(2)当 $a<x<b$ 时,函数 $\varphi(x)$是单调的,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x,$$

式中 $a\leqslant\xi\leqslant b$；(3)此外，若函数 $\varphi(x)$ 单调下降(广义的)且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x \quad (a\leqslant\xi\leqslant b);$$

(3′)若函数 $\varphi(x)$ 单调上升(广义的)且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

【2316】 确定下列定积分的符号：

(1) $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$；(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；(3) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x\mathrm{d}x$；(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x\mathrm{d}x$.

提示 (2)及(3)使用第一中值定理.

解 (1) $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}(t+\pi)\sin t\mathrm{d}t=-\pi\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x<0.$

(2) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2\sin c}{c(c+\pi)}>0,\quad (其中\ 0<c<\pi).$$

(3) 由第一中值定理知

$$\int_{-2}^{2} x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^{2} x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_2^{0} t^3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_0^{2} x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_0^{2} x^3(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$$

$$=2c^3(\mathrm{e}^c-\mathrm{e}^{-c})>0\quad (其中\ 0<c<2).$$

(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}c^2\ln c<0$ (其中 $\frac{1}{2}<c<1$).

【2317】 确定哪个积分较大：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$；(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$0<\sin x<1$，从而，$0<\sin^{10}x<\sin^2 x$. 于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x.$$

(2) 当 $0<x<1$ 时，$x>x^2$，从而，$\mathrm{e}^{-x}<\mathrm{e}^{-x^2}$. 于是，

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+x)^2}\cos^2 x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x.$

【2318】 求下列函数在所给区间内的平均值：

(1) $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上； (2) $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,100]$ 上；

(3) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上； (4) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ 在 $[0,2\pi]$ 上.

解 (1) $M[f]=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$；

(2) $M[f]=\frac{1}{100}\int_0^{100}\sqrt{x}\mathrm{d}x=6\frac{2}{3}$；

(3) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(10+2\sin x+3\cos x)\mathrm{d}x=10$；

(4) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\varphi)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos\varphi.$

【2319】 求椭圆之焦径 $r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ 之长的平均值.

解 设 $\varphi=\pi+t$，则

$$M(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}d\varphi=\frac{p}{2\pi}\ \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{}^{*)}=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b,$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用 2213 题的结果.

【2320】 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值.

解 自由落体的速度为 $v=v_0+gt$，从 $t=0$ 到 $t=T$ 时间内的速度的平均值为

$$M[v]=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)dt=\frac{1}{2}gT+v_0=\frac{1}{2}(v_0+v_T).$$

物理意义：平均速度等于初速与末速之和的一半.

【2321】 电流强度依规律

$$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right),$$

变化，其中 i_0 为振幅，t 为时间，T 为周期，φ 为初相，求电流强度之平方的平均值.

解 $M(i^2)=\frac{1}{T}\int_0^T i_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)dt=\frac{i_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)-\frac{1}{4}\sin2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}.$

将上式开平方，即得电流的有效值 $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

【2322】 命 $\int_0^x f(t)dt=xf(\theta x)$，求 θ，设：(1) $f(t)=t^n(n>-1)$；(2) $f(t)=\ln t$；(3) $f(t)=e^t$，$\lim\limits_{x\to0}\theta$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$ 等于什么？

解 (1) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}$，从而，$\frac{x^{n+1}}{n+1}=\theta^n x^{n+1}$. 于是，$\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$.

(2) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \ln t dt=t(\ln t-1)\Big|_0^x=x(\ln x-1)$，从而，$x(\ln x-1)=x\ln\theta x$. 于是，$\theta=\frac{1}{e}$.

(3) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x e^t dt=e^t\Big|_0^x=e^x-1$，从而，$e^x-1=xe^{\theta x}$，于是，$\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$. 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$，故当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 因此，

$$\lim_{x\to0}\theta=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}\right]=\lim_{x\to0}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{e^x-1+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{-x}\frac{e^x-1}{x}+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1.$$

于是，$\lim\limits_{x\to0}\theta=\frac{1}{2}$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta=1$.

利用第一中值定理，估计积分：

【2323】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}$.

解 由于

$$\frac{1}{1+0.5}\leqslant\frac{1}{1+0.5\cos x}\leqslant\frac{1}{1-0.5},$$

即

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{1+0.5\cos x}\leqslant2.$$

于是，

$$\frac{4\pi}{3}\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}\leqslant4\pi$$

即 $$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}=\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta\quad(|\theta|\leqslant 1).$$

【2324】 $\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx.$

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^9\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$，从而，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9dx\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx\leqslant\int_0^1 x^9dx,$$

即 $$\frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx\leqslant\frac{1}{10}.$$

【2325】 $\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx.$

解 $I=\int_0^{50}\frac{e^{-x}}{x+100}dx+\int_{50}^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{1}{100+\xi_1}\int_0^{50}e^{-x}dx+\frac{1}{100+\xi_2}\int_{50}^{100}e^{-x}dx$

$=\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2},$

其中 $0\leqslant\xi_1\leqslant 50$，$50\leqslant\xi_2\leqslant 100$. 显然

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}\leqslant\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1}=\frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1}<\frac{1}{100},$$

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}>\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}\geqslant\frac{1-e^{-50}}{150}>\frac{1}{200},$$

故 $\frac{1}{200}<I<\frac{1}{100}$，即 $I=0.01-0.005\theta$，$0<\theta<1$. 此外，按中值定理，可写

$$I=\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{1}{\xi+100}\int_0^{100}e^{-x}dx=\frac{1}{\xi+100}\left(1-\frac{1}{e^{100}}\right),$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant 100$，如果改写 I 为 $I=0.01-0.005\theta$，则有 $\theta=f(\xi)=\frac{2}{100+\xi}\left(\xi+\frac{100}{e^{100}}\right)$.

易见导数 $$f'(\xi)=\frac{200(1-e^{-100})}{(100+\xi)^2}>0,$$

$f(\xi)$单调上升，故在$[0,100]$上有 $f(0)\leqslant f(\xi)\leqslant f(100)$，也即有$\frac{2}{e^{100}}\leqslant\theta\leqslant 1+\frac{1}{e^{100}}$.

根据前面的估计 $0<\theta<1$，综合起来，便有 $\quad\frac{2}{e^{100}}\leqslant\theta<1.$

这个结果比原来的估计又好了一些. 如果更精确一些，采用些近似计算方法，还可进一步明确 θ 的数值范围. 此处从略.

【2326】 证明等式：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0.$

证 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{n+1}\right)=0$；

(2) 任意给定 $\varepsilon>0$，且设 $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，则

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,dx+\varepsilon\leqslant\varepsilon+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

当 $n\to\infty$时，上述不等式的第二项趋于零，于是，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0.$$

【2327】 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，而 $\varphi(x)$在$[a,b]$上连续且在(a,b)上可微，并且当 $a<x<b$ 时 $\varphi'(x)\geqslant 0$，应用分部积分法及第一中值定理，证明第二中值定理.

证 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}F(x)=F(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\xi)\int_a^b\varphi'(x)\mathrm{d}x=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\xi)[\varphi(b)-\varphi(a)]^{*)}$$

$$=\varphi(b)[F(b)-F(\xi)]+\varphi(a)[F(\xi)-F(a)]=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x+\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

*) 一般数学分析教程中已有第二中值定理的证明，本题限用分部积分法证明，应加 $\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的条件.

利用第二中值定理，估计积分：

【2328】 $\displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解 设
$$f(x)=\sin x,\ \varphi(x)=\frac{1}{x},$$
则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[100\pi,200\pi]$ 上满足第二中值定理的条件，又 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 单调下降且不为负，于是：

$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1-\cos\xi}{100\pi}=\frac{\sin^2\dfrac{\xi}{2}}{50\pi}=\frac{\theta}{50\pi},$$
其中 $100\pi\leqslant\xi\leqslant200\pi$ 及 $0\leqslant\theta\leqslant1$.

【2329】 $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\sin x\mathrm{d}x\quad(\alpha\geqslant0;\ 0<a<b).$

解 设 $f(x)=\sin x,\ \varphi(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}$，同上题，有
$$\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha a}}{a}\int_a^\xi\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{a\mathrm{e}^{\alpha a}}(\cos a-\cos\xi)=-\frac{2}{a}\mathrm{e}^{-\alpha a}\sin\frac{a+\xi}{2}\sin\frac{a-\xi}{2}=\frac{2}{a}\theta,$$
其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$ 及 $|\theta|<1$.

【2330】 $\displaystyle\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x\quad(0<a<b).$

解 设 $x=\sqrt{t}$. 则
$$\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
其次，设 $f(t)=\sin t,\ \varphi(t)=(\sqrt{t})^{-1}$，则 $\varphi(t)$ 单调下降，且 $\varphi(t)>0$. 于是，
$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi)=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi+a^2}{2}\sin\frac{\xi-a^2}{2}=\frac{1}{a}\theta,$$
其中
$$a^2\leqslant\xi\leqslant b^2,\ |\theta|\leqslant1.$$
所以，
$$\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\theta}{a}\quad(|\theta|\leqslant1).$$

【2331】 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a,b]$ 上可积. 证明柯西—布尼亚科夫斯基不等式：
$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

提示 考虑积分 $\displaystyle\int_a^b[\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2\mathrm{d}x$，其中 λ 为任意实数.

证 证法 1：我们有
$$\left(\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\right)-\left(\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b\varphi^2(y)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b\psi^2(y)\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{2}\left(\int_a^b\psi^2(y)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b\varphi^2(y)\mathrm{d}y\right)-\left(\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b\varphi(y)\psi(y)\mathrm{d}y\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\int_a^b[\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)]^2\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\geqslant0,$$

故 $$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2:考虑积分 $$\int_a^b[\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2\mathrm{d}x,$$

其中 λ 为任意实数.从而有

$$\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x-2\lambda\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

这是关于变量 λ 的不等式,左端是二次三项式.于是,其判别式

$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2-\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即 $$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

【2332】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微且 $f(a)=0$,证明不等式:

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

提示 利用 2331 题的结果,有

$$\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t.$$

证 设 x 为 $[a,b]$ 上任一点,利用柯西—布尼亚科夫斯基不等式得到

$$\left\{\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}x\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$f^2(x)=[f(x)-f(a)]^2\leqslant(x-a)\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

由此可知 $M^2=\sup\limits_{x\in[a,b]}f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$.

【2333】 证明:等式 $$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.$$

提示 使用第一中值定理或第二中值定理.

证 证法 1:应用第一中值定理,知

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}p=0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值.

证法 2:应用第二中值定理,得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi_n'}\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}|\cos n-\cos\xi_n'|\leqslant\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中 ξ_n' 是界于 n 与 $n+p$ 之间的某值.于是,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_p^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$.

§4. 广义积分

1° **函数的广义可积分性** 若函数 $f(x)$ 在每一个有限区间 $[a,b]$ 上依寻常的意义是可积的,则可定义

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\tag{1}$$

若函数 $f(x)$ 在点 b 的邻域内无界且在每一个区间 $(a,b-\varepsilon)(\varepsilon>0)$ 内依寻常的意义是可积的,则取

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x.\tag{2}$$

若极限(1)或(2)存在,则相应的积分称为收敛的,否则称为发散的(在基本的意义上).

2° **柯西准则** 积分(1)收敛的充要条件为:对于任意的 $\varepsilon>0$,存在数 $b=b(\varepsilon)$,当 $b'>b$ 及 $b''>b$ 时,下面

的不等式成立：

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对于形如(2)的积分柯西准则的表述是类似的.

3° **绝对收敛的判别法** 若$|f(x)|$是广义可积的，则函数$f(x)$所对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的，而且显然也是收敛的.

比较判别法Ⅰ. 设当$x\geqslant a$时$|f(x)|\leqslant F(x)$. 若$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$收敛，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛.

比较判别法Ⅱ. 若$\psi(x)>0$及当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)=O^*[\psi(x)]$，则积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$及$\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散. 就特别情形来说，若当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\sim\psi(x)$，则上面的结果也成立.

比较判别法Ⅲ. (1) 设当$x\to+\infty$时，$f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$. 在这种情况下，当$p>1$时，积分(1)收敛；当$p\leqslant1$时，积分(1)发散.

(2) 设当$x\to b-0$时，$f(x)=O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right]$. 在这种情况下，当$p<1$时，积分(2)收敛；当$p\geqslant1$时，积分(2)发散.

4° **收敛性的较精密的判别法** 若(1)当$x\to+\infty$时，函数$\varphi(x)$单调地趋近于零；(2)函数$f(x)$有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

收敛，但一般地说，并非绝对收敛.

在特殊情形下，若$p>0$，则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

收敛.

5° **柯西主值** 若对于任意的$\varepsilon>0$，函数$f(x)$的积分

$$\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$$

存在，则柯西主值($V\cdot P\cdot$)为

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right].$$

相仿地，

$$V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

计算下列积分：

【2334】 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\quad(a>0)$.

解 由于$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}$，所以，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{a}$.

【2335】 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

解 由于$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}(\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon-1)=-1$，所以，$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$.

【2336】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 由于 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}=\pi$，所以，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

【2337】 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 由于 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim\limits_{\varepsilon'\to+0}\int_0^{1-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}[-\arcsin(-1+\varepsilon)]+\lim\limits_{\varepsilon'\to+0}\arcsin(1-\varepsilon')=\pi$，

所以，$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$.

【2338】 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 由于 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^2+x-2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\right)\Big|_2^b=\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b-1}{b+2}+2\ln2\right)=\frac{2}{3}\ln2$，

所以，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}\ln2$.

【2339】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

提示 从定义出发，并利用 1921 题的递推公式.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}^{*)}+C$.

由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right]-\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2340】 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

提示 从定义出发，并利用 1881 题的结果.

解 由于 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^3}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Big|_0^b=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$，

所以，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1881 题的结果.

【2341】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

提示 从定义出发，并利用 1712 题的结果.

解 由于 $\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^b\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}\Big|_\varepsilon^b=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，所以，$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

*) 利用 1712 题的结果.

【2342】 $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

提示 令 $\sqrt{1-x}=t$，并从定义出发.

解 先求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. 设 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$， $\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$， $2-x=1+t^2$.

代入得 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-2\arctan t+C=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.$$

由于 $$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\arctan\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arctan\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

所以，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\frac{\pi}{2}$.

【2343】 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

提示 令 $\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$，并从定义出发.

解 设 $\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$. 则当 $1\leqslant x<+\infty$时，$1+\sqrt{3}\leqslant t<+\infty$. 代入得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\frac{2}{5}\int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{5}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty\ *)}=\frac{1}{5}\ln 1-\frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

*) 牛顿—莱布尼茨公式对于广义积分也成立. 例如，

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$是一个符号，代表 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$（假定此极限存在有限），下同，不再说明.

【2344】 $\int_a^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 我们有

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

由于 $$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]\Bigg|_\varepsilon^b$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left[-\frac{\ln b}{2(1+b^2)}+\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{b^2+1}-\frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)}\ln\varepsilon+\frac{1}{4}\ln(\varepsilon^2+1)\right]=0,$$

所以，$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=0$.

注 $\varepsilon\to+0$ 与 $b\to+\infty$的极限过程是独立的，因此，可分别取极限.

【2345】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 设 $x=\tan t$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sec^2 t\mathrm{d}t}{\sec^3 t}=(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

【2346】 $\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 $\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\left(\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{-ax}\right)^{*)}\Big|_a^{+\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}$.

*) 利用 1828 题的结果.

【2347】 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx=\left(\frac{-a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right)^{*)}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{b}{a^2+b^2}$.

*） 利用 1829 题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分（n 为正整数）：

【2348】 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

提示 $I_n=nI_{n-1}$.

解 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n d(-e^{-x})=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1}$.

即 $I_n=nI_{n-1}$，利用此递推公式及 $I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$，

容易得到 $I_n=n(n-1)\cdots 2\cdot 1 I_0=n!$.

【2349】⁺ $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0)$.

解题思路 利用 1921 题的递推公式及定义可得

$$I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1},$$

并注意 $I_1=\frac{\pi\,\mathrm{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}$.

解 $I_n=\frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{2(ac-b^2)}I_{n-1}{}^{*)}=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1}$,

即 $$I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1}\quad(n>1).$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{\mathrm{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi\,\mathrm{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及 I_1 容易得到

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\mathrm{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac12}}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\mathrm{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac12}}.$$

*） 利用 1921 题的结果.

【2350】⁺ $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

解 由于 $x^{n+1}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\to 1$（当 $x\to+\infty$ 时），且 $n+1>1$，所以，积分 I_n 收敛.

其次，我们来计算 I_n. 由于

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{1}{n!x}-\frac{1}{(n-1)!(x+1)}+\frac{1}{2!(n-2)!(x+2)}-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!(x+k)}$$
$$+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!(x+n)},$$

所以， $$I_n=\frac{1}{n!}\int_1^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\frac{dx}{x+k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\ln(x+k)\Bigg|_1^{+\infty},$$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数.

对于 n，不论是偶数还是奇数，用上限代入（此处理解为趋近于无穷时的极限）后均为零. 事实上，当 $n=$

$2m$ 时，

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_n^k \ln(x+k)=\ln\frac{x(x+2)^{C_{2m}^2}\cdots(x+2m)^{C_{2m}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2m}^1}(x+3)^{C_{2m}^3}\cdots(x+2m-1)^{C_{2m}^{2m-1}}}.$$

由于
$$1+C_{2m}^2+\cdots+C_{2m}^{2m}=C_{2m}^1+C_{2m}^3+\cdots+C_{2m}^{2m-1},$$

所以，当 $m\to+\infty$ 时
$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_n^k \ln(x+k)\to\ln 1=0;$$

当 $n=2m-1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k C_n^k \ln(x+k)=\ln\frac{x(x+2)^{C_{2m-1}^2}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2m-1}^1}(x+3)^{C_{2m-1}^3}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-1}}}\to 0$$

（当 $m\to+\infty$ 时）.

最后我们得到 $I_n=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(1+k)$.

【2351】 $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解题思路 注意到当 $x\to1-0$ 时，

$$\sqrt{1-x}\,\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 I_n 收敛.

解 由于 $\sqrt{1-x}\,\dfrac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\dfrac{1}{2}$（当 $x\to1-0$ 时），且 $p=\dfrac{1}{2}<1$，所以，积分 I_n 收敛.

其次，设 $x=\sin t$，则
$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,^{*)}\\[2mm] \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & n=2k-1.\end{cases}$$

*）利用 2281 题的结果.

【2352】 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\mathrm{ch}^{n+1}x}$.

提示 令 $x=\ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)$，并利用 2282 题的结果.

解 设 $x=\ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)$，则当 $0\leqslant x<+\infty$ 时，$\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi$，

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\mathrm{ch}^{n+1}x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,^{*)}\\[2mm] \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & n=2k-1.\end{cases}$$

*）利用 2282 题的结果.

【2353】 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$； (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$.

解题思路 首先，容易证明它们是收敛的.

其次，令 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，可得 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=A$. 相加即得 $2A=A-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

解 先证明它们是收敛的. 事实上，当 $x\to+0$ 时，$\sqrt{x}\,\ln\sin x\to0$，所以，积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 收敛.

同法可证积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$ 也收敛.

其次，求这两个积分的值. 设 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=A.$$

相加得
$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx-\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt-\frac{\pi}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt\right)-\frac{\pi}{2}\ln 2$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt-\frac{\pi}{2}\ln 2=A-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

于是，$2A=A-\frac{\pi}{2}\ln 2$，$A=-\frac{\pi}{2}\ln 2$，即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

【2354】 求
$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx,$$
其中 E 表区间$(0,+\infty)$中使被积分式有意义的一切 x 值的集合.

解题思路 首先，注意到
$$\text{原式}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx.$$

其次，将$[2k\pi,(2k+1)\pi]$分成$[2k\pi,(2k+\frac{1}{4})\pi]$及$[(2k+\frac{1}{4})\pi,(2k+1)\pi]$，并注意到
$$\left(2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\right)'=e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}},$$
分区间积分即易获解.

解 $$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx\ ,^{*}$$

对于广义积分 $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$ 作如下处理：
$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx+\int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$$
$$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}-2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}=2\sqrt[4]{8}\ e^{-k\pi}\ e^{-\frac{\pi}{8}}.$$

注意到
$$\sum_{k=0}^{n}2\sqrt[4]{8}\ e^{-\frac{\pi}{8}}e^{-k\pi}=2\sqrt[4]{8}\ e^{-\frac{\pi}{8}}\frac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}},$$
当 $n\to+\infty$时，上式的极限为 $2\sqrt[4]{8}\ e^{-\frac{\pi}{8}}\frac{1}{1-e^{-\pi}}$. 于是，
$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}.$$

【2355】 证明等式： $$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx.$$
其中 $a>0$，$b>0$ （假定等式左端的积分有意义）.

证 设 $ax-\frac{b}{x}=t$，则当 $0<x<+\infty$时，$-\infty<t<+\infty$， $ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}$.

将此二式相加得
$$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab}).$$

---

* 记号 $\sum_{k=0}^{\infty}S_k$ 理解为极限 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k$. 以后题解中不再说明.

从而有
$$dx=\frac{1}{2a}\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

代入要证的等式左端，得

$$\int_0^{+\infty}\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$
$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$
$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$
$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t+\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$
$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})dt,$$

于是，
$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx.$$

【2356】 数
$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)d\xi$$
称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的平均值. 求下列函数在此区间上的平均值：

(1) $f(x)=\sin^2x+\cos^2(x\sqrt{2})$； (2) $f(x)=\arctan x$； (3) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

解 (1) 由于

$$\int_0^x[\sin^2\xi+\cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi=\int_0^x\left[\frac{1-\cos2\xi}{2}+\frac{1+\cos(2\xi\sqrt{2})}{2}\right]d\xi=x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2}),$$

所以，

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[\sin^2\xi+\cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{4x}\sin2x+\frac{1}{4x\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2})\right]=1;$$

(2) $$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\arctan\xi d\xi=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{2x}=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(1+x^2)}=\frac{\pi}{2};$$

(3) 利用第二中值定理，得

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi d\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi d\xi=\sqrt{x}(\cos c-\cos x)\quad(0\leqslant c\leqslant x).$$

于是，$M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi d\xi=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$

【2357】 求：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}$； (3) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$ *)； (4) $\lim\limits_{x\to+0}x^a\int_x^1\frac{f(t)}{t^{a+1}}dt$ *)，

其中 $a>0$，$f(t)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数.

解 (1) 由于 $1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos t\leqslant1$，所以，$\int_x^1\frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}dt\leqslant\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt\leqslant\int_x^1\frac{dt}{t^2}$，

计算得 $-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\leqslant\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt\leqslant-1+\frac{1}{x}$. 又由于

$$\lim_{x\to0}x\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)=1\quad及\quad\lim_{x\to0}x\left(-1+\frac{1}{x}\right)=1,$$

故最后得到 $\lim\limits_{x\to 0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=1$；

(2) 由于 $t^2<\sqrt{1+t^4}$，所以，$\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}$，从而，当 $x\to+\infty$时，$\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\to+\infty$. 利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\frac{1}{3}；$$

(3) 由于 $\lim\limits_{t\to+0}t(t^{-1}\mathrm{e}^{-t})=1$，故广义积分 $\int_0^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 发散. 从而，所求的极限是$\frac{\infty}{\infty}$型不定式. 利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\mathrm{e}^{-x}x^{-1}}{-\frac{1}{x}}=1；$$

(4) 由于 $f(t)$在 $t=0$ 处右连续，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使当 $0<t<\delta'$时，有 $|f(t)-f(0)|<\frac{a\varepsilon}{2}$. 今又取 $0<\delta<\delta'$，使当 $0<x<\delta$ 时，有

$$\left|x^a\int_{\delta'}^1\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $0<x<\delta$ 时，就有

$$\left|x^a\int_x^1\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t\right|=\left|x^a\int_x^{\delta'}\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t+x^a\int_{\delta'}^1\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{a\varepsilon}{2}x^a\int_x^{\delta'}\frac{\mathrm{d}t}{t^{a+1}}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}x^a\left(\frac{1}{x^a}-\frac{1}{\delta'^a}\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to+0}x^a\int_x^1\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}\mathrm{d}x=0,$$

最后得到

$$\lim_{x\to+0}x^a\int_x^1\frac{f(t)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+0}x^a\int_x^1\frac{f(0)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+0}x^af(0)\left[-\frac{1}{a}t^{-a}\right]\Big|_x^1$$

$$=\lim_{x\to+0}x^af(0)\left(\frac{1}{ax^a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{f(0)}{a}.$$

*) 原题(3)、(4)中 $x\to+0$ 误印为 $x\to0$.

研究下列积分的收敛性：

【2358】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$.

提示 注意当 $x\to+\infty$时，$x^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\to1$.

解 由于 $x^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\to1$（当 $x\to+\infty$时），所以，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$ 收敛.

【2359】 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

提示 注意当 $x\to+\infty$时，$x^{\frac{5}{3}}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\to1$.

解 由于 $x^{\frac{5}{3}}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\to1$（当 $x\to+\infty$时），所以，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

【2360】 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

提示 注意由$(1-x)\frac{1}{-\ln x}\to1$(当 $x\to1-0$)，即知 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$发散. 从而，原积分也发散.

解 当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$. 由于 $\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)\dfrac{1}{-\ln x}=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{x}}=1$,

所以，积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{\ln x}$ 发散，从而，积分 $\int_0^2\dfrac{dx}{\ln x}$ 也发散.

【2361】 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$.

解题思路 先将原积分分成

$$原式=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx.$$

对于上式右端第一个积分，只要注意当 $x\to+0$ 时，$x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x})\to1$；而对于第二个积分，只要注意当 $x\to+\infty$ 时，$x^2(x^{p-1}e^{-x})\to0$. 从而，当 $p>0$ 时，原积分收敛.

解 将积分分成

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx.$$

对于积分 $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$. 由于 $x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x})\to1$（当 $x\to+0$ 时），故当 $p>0$ 时（从而 $1-p<1$），积分 $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛.

对于积分 $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$. 由于

$$x^2(x^{p-1}e^{-x})=\frac{x^{p+1}}{e^x}\to0\quad（当 x\to+\infty 时），$$

故对于一切 p 值，积分 $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 恒收敛.

于是，当 $p>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛.

【2362】 $\int_0^1 x^p\ln^q\dfrac{1}{x}dx$.

解 将积分分成

$$\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx.$$

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\dfrac{1}{x}dx$，由于

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{-q}x^p\ln^q\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-0}x^p\left(\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q=\left(\lim_{x\to1-0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q=\left[\lim_{x\to1-0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1}\right]^q=1,$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\dfrac{1}{x}dx$ 当 $-q<1$（即 $q>-1$）时收敛，当 $-q\geqslant1$（即 $q\leqslant-1$）时发散. 于是，当 $q\leqslant-1$ 时，积分 $\int_0^1 x^p\ln^q\dfrac{1}{x}dx$ 必发散. 故下面可在 $q>-1$ 的假定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\dfrac{1}{x}dx$.

若 $p>-1$，可取 $\tau>0$ 充分小，使 $p-\tau>-1$. 于是，

$$\lim_{x\to+0}x^{-p+\tau}x^p\ln^q\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^\tau}=0.$$

由于 $-p+\tau<1$，故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\dfrac{1}{x}dx$ 收敛；

若 $p\leqslant-1$（设 $q>-1$），则

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}dx\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q d\left(\ln\frac{1}{x}\right)=-\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=+\infty.$$

故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 发散.

总之,仅当 $p>-1$ 且 $q>-1$ 时,积分 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 收敛.

【2363】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n\geqslant 0)$.

解题思路 仿 2361 题,有 原式 $=\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx+\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx$.

对于上式右端第一个积分,只要注意当 $x\to+0$ 时,$x^{-m}\frac{x^m}{1+x^n}\to 1$;而对于第二个积分,只要注意当 $x\to+\infty$ 时,$x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}\to 1$.

从而,当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时,原积分收敛.

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx$. 由于

$$x^{-m}\frac{x^m}{1+x^n}\to 1 \quad (\text{当 } x\to+0 \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx$ 仅当 $-m<1$,即仅当 $m>-1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx$. 由于 $x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}\to 1$ (当 $x\to+\infty$ 时),

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛.

于是,当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx$ ($n\geqslant 0$)收敛.

【2364】 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx \quad (a\neq 0)$.

解 由于 $\arctan ax=-\arctan(-ax)$,故可设 $a>0$,先考虑积分 $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x^n}dx$. 由于

$$\lim_{x\to+0} x^{n-1}\frac{\arctan ax}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\arctan ax}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{a}{1+a^2x^2}}{1}=a,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n}dx$. 由于

$$x^n\frac{\arctan ax}{x^n}\to\frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } x\to+\infty \text{时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n}dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛.

于是,当 $1<n<2$ 时,积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n}dx$ ($a\neq 0$)收敛.

【2365】 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$.

解 先考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$. 当 $n>1$ 时,取 $a>0$ 充分小,使 $n-a>1$. 由于

$$x^{n-a}\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\frac{\ln(1+x)}{x^a}\to 0 \quad (\text{当 } x\to+\infty \text{时}),$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛. 当 $n\leqslant 1$ 时,由于

$$x^n\frac{\ln(1+x)}{x^n}\to+\infty\quad(\text{当 } x\to+\infty\text{时}),$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 发散.

再考虑积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$. 由于 $\lim\limits_{x\to+0}x^{n-1}\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,

故积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛.

于是,当 $1<n<2$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛.

【2366】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx\quad(n\geqslant0)$.

解题思路 仿 2361 题,有

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx.$$

对于上式右端第一个积分,只要注意当 $x\to+0$ 时,$x^{-m-1}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}\to\frac{1}{2}$;而对于第二个积分,只要注意当 $x\to+\infty$ 时,$x^{n-m}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}\to\frac{\pi}{2}$.

从而,当 $m>-2$ 且 $n-m>1$ 时,原积分收敛.

解 先考虑积分 $\int_0^1\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$.

由于
$$\lim_{x\to+0}x^{-m-1}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{2},$$

故积分 $\int_0^1\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$ 仅当 $-m-1<1$ 即当 $m>-2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$. 由于

$$x^{n-m}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}=\frac{x^n\arctan x}{2+x^n}\to\frac{\pi}{2}\quad(\text{当 } x\to+\infty\text{时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛.

于是,当 $m>-2$ 且 $n-m>1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx\ (n\geqslant0)$ 收敛.

【2367】$^+$ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx\quad(n\geqslant0)$.

解 当 $a\neq0$ 时,设 $f(x)=\cos ax$,$g(x)=\frac{1}{1+x^n}$,则对于任意的 $A>0$,均有 $\left|\int_0^A f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{a}$;其次,当 $n>0$ 时,$g(x)$ 单调下降且趋于零($n\to+\infty$). 从而得知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$ 收敛. 至于当 $n=0$ 时,积分显然发散.

当 $a=0$ 时,由于 $x^n\frac{1}{1+x^n}\to1$(当 $x\to+\infty$ 时),故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛.

于是,当 $a\neq0$、$n>0$ 及 $a=0$、$n>1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$. 收敛.

【2368】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x}dx$.

解题思路 首先,注意到 $\frac{\sin^2x}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos2x}{x}\right)$.

其次，易证 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ 收敛. 而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 发散. 于是，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散，从而，原积分也发散.

解 方法 1：
$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right).$$

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 显然发散.

又因对于任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A \cos 2x dx\right|\leqslant 2$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ 收敛.

于是，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散，从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散.

方法 2：
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{t+n\pi}dt\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$
由于不论 N 取多大，只要取 $p=N$，就有
$$\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}=\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{2N}>\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\cdots+\frac{1}{2N}}_{N个}=\frac{1}{2N}N=\frac{1}{2},$$
故递增数列 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 是 $+\infty$，即 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$.

于是，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散.

【2369】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$. 对于任何 q 值，由于
$$\lim_{x\to+0}x^p\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos^q x}\right)=1,$$
故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 仅当 $p<1$（q 为任意值）时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$. 对于任何 p 值，由于
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^q\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\sin^p x}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^q=1,$$
故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 仅当 $q<1$（p 为任意值）时收敛.

于是，当 $p<1$ 且 $q<1$ 时，积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛.

【2370】 $\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 由于 $\lim_{x\to+0}\left(x^{-n}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)=1$，故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 仅当 $-n<1$ 即当 $n>-1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 对于任意的 n，由于
$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 恒收敛.

于是，当 $n>-1$ 时，积分 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

【2371】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$. 不妨设 $\min(p,q)=p$，由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^p \frac{dx}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+x^{q-p}}=1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $p<1$，即当 $\min(p,q)<1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$. 不妨设 $\max(p,q)=q$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^q \frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-(q-p)}+1}=1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $q>1$ 即当 $\max(p,q)>1$ 时收敛.

于是，当 $\min(p,q)<1$ 且 $\max(p,q)>1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$ 收敛.

【2372】 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. 由于 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{x}\ \frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0$，故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. 由于 $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\ \frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0$，故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛.

于是，积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛.

【2373】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\left[x^{\frac{5}{6}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\sin x}\ \ln(\sin x)\right]=0,$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

【2374】 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

解 先考虑 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p\ln^q x}$. 对于任意的 p，由于

$$\lim_{x\to1+0}\left[(x-1)^q \frac{1}{x^p\ln^q x}\right]=\lim_{x\to1+0}\left[\frac{1}{x^p}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\right]=\left(\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=\left(\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q=1,$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 仅当 $q<1$ 且 p 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$. 如果 $p>1$，取 $\alpha>0$ 充分小，使 $p-\alpha>1$，则对于任意的 q，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\alpha}\frac{1}{x^p\ln^q x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}\right)=0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛；如果 $p\leqslant1$，$q<1$，由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^q x}=\left.\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 发散.

于是，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

【2375】 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

解 先考虑积分 $\int_e^3\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$. 对于任意的 p 和 q，由于

$$\lim_{x\to e+0}\frac{(x-e)^r}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\frac{1}{e^p}\left(\lim_{x\to e+0}\frac{x-e}{\ln\ln x}\right)^r=\frac{1}{e^p}\left(\lim_{x\to e+0}\frac{1}{\frac{1}{x\ln x}}\right)^r=e^{r-p},$$

故积分 $\int_e^3\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 仅当 $r<1$ 和 p、q 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$. 分三种情形讨论：

(1) 如果 $p>1$，q 和 r 为任意值. 取 $\alpha>0$ 充分小，使 $p-\alpha>1$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\alpha}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=0,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 收敛；

(2) 当 $p=1$ 时，则有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dx}{x^q(\ln x)^r},$$

利用 2374 题的结果得知，当 $p=1,q>1$ 和 $r<1$ 时，积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 收敛；

(3) 当 $p<1$ 时，取 $\delta>0$ 充分小，使 $p+\delta<1$. 对于任意的 q 和 r，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+\delta}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\delta}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=+\infty,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 发散.

于是，当 $p>1$，q 是任意的，$r<1$ 和当 $p=1$，$q>1$，$r<1$ 时，积分 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 收敛.

【2376】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ $(a_1<a_2<\ldots<a_n)$.

解 首先，被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^n p_i$ 级无穷小（当 $x\to\pm\infty$ 时).

其次，

$$\lim_{x\to a_i}\left(|x-a_i|^{p_i}\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\right)=c_i,\qquad (0<c_i<+\infty,(i=1,2,\cdots,n),$$

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ 当 $\sum_{i=1}^n p_i>1$ 且 $p_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时收敛.

【2377】 $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$. 式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互素的多项式.

解 当 $P_n(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有根 λ 并设其重数为 $r(\geqslant1)$ 时，由于 $P_n(x)$ 与 $P_m(x)$ 互素，故 λ 不是 $P_m(x)$ 的根. 从而有

$$\lim_{x\to\lambda}\left[(x-\lambda)^r\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=a\neq0,$$

而且显然在点 λ 的右（左）近旁，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 都保持定号. 由于 $r\geqslant1$，故积分发散. 由于 $\lim_{x\to+\infty}\left[x^{n-m}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=b\neq0$，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$ 仅当 $n-m>1$ 即当 $n>m+1$ 时收敛.

于是，当 $P_n(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内无根且 $n>m+1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$ 收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

【2378】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解题思路 易证积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 而积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 显然收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 其次，由 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}$ $(x>0)$ 及 2368 题的结果可知，原积分不是绝对收敛的.

解 对于任意的 $A>1$，由于 $\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 而积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是普通的定积分（$\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 有可去不连续点，故补充定义其值为 1 后，$\frac{\sin x}{x}$ 可视为 $[0,1]$ 上的连续函数），故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 但它不是绝对收敛的.

事实上，当 $x>0$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}$，由 2368 题知，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散，故积分 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

【2379】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$.

解 对于任意的 $A>0$，由于 $\left|\int_0^A\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调地趋于零，因此，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$ 收敛. 但它不是绝对收敛的.

事实上，由于

$$\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\geqslant\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100}-\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\right),$$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x}}{x+100}\right)=1$，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}\mathrm{d}x$ 发散. 仿照前半段证明，可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}\mathrm{d}x$ 发散.

于是，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\mathrm{d}x$ 发散.

【2380】 $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x$ $\quad(q\neq 0)$.

解 设 $t=x^q$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}$. 于是，

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$. 由于

$$\lim_{t\to+0}\left(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 仅当 $-\frac{p+1}{q}<1$，即当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时收敛. 又由于被积函数在 $[0,1]$ 上非负，故也是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$. 如果 $\frac{p+1}{q}<1$，则由于对任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A\sin t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ 单调地趋于零（当 $t\to+\infty$ 时），故此时积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q}=1$，则积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 显然发散.

从而，积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q}>1$，则由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}=+\infty$，故对任给的 $A>0$，总存在正整数 N，使有 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$，且当 $t>2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$.

令取 $A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}$，　$A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}$，则有

$$\left|\int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t\right|>\sqrt{2}\left|\int_{A'}^{A''}\sin t\mathrm{d}t\right|=1,$$

它不可能小于任给的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，因而，积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 发散，从而，积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} t\mathrm{d}t$ 也发散.

于是，仅当 $-1<\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 收敛，且当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时，积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 绝对收敛.

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 的绝对收敛性. 分三种情形讨论：

(1) 当 $\frac{p+1}{q}<0$ 时，由于

$$\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1}\quad(1\leqslant t<+\infty).$$

且 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\mathrm{d}t$ 收敛，故当 $\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 绝对收敛；

(2) 当 $\frac{p+1}{q}=0$ 时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=+\infty$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛)；

(3) 当 $\frac{p+1}{q}>0$ 时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\mathrm{d}t\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty,$$

故此时积分也不是绝对收敛的.

于是，当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 绝对收敛.

最后我们得到：当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x$ 绝对收敛；当 $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分条件收敛.

【2381】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x\quad(q\geqslant0)$.

解 先考虑积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$. 由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{-1-p}\,\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x^q}\right)=1,$$

故积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 仅当 $-1-p<1$ 即当 $p>-2$ 时收敛，且是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$.

(1)若 $p\geqslant q$，则对任何 $A>1$，必存在正整数 N，使 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$ 且当 $x\geqslant2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，恒有 $\frac{x^p}{1+x^q}>\frac{1}{3}$.

于是，对 $A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}$，$A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}$，有

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{x^p}{1+x^q}\sin x\mathrm{d}x\right|>\frac{1}{3}\int_{A'}^{A''}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{6},$$

它不可能小于任给的 ε，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

(2)若 $p<q-1$，取 $\alpha>0$ 使 $p+\alpha<q-1$，即 $q-p-\alpha>1$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{q-p-\alpha}\frac{x^p}{1+x^q}|\sin x|=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^q}{1+x^q}\cdot\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\right)=0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(3)现设 $q-1\leqslant p<q$. 先证 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 发散. 事实上，此时，可取 $A_0>1$，使当 $x\geqslant A_0$ 时，$\frac{x^{p+1}}{1+x^q}>\frac{1}{3}$；故

$$\int_{A_0}^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x=\int_{A_0}^{+\infty}\left(\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{3}\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=+\infty,$$

从而，$\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

再证 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛. 事实上，若 $q=0$，则 $-1\leqslant p<0$，此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}x^p\sin x\mathrm{d}x$ 显然收敛；若 $q>0$，由于 $\left(\frac{x^p}{1+x^q}\right)'=\frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2}<0$（当 x 充分大时），故当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于零. 而 $\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos A|\leqslant 2$ 有界，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛. 总之，我们证明了：当 $q-1\leqslant p<q$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

于是，最后得结论：积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ 当 $p>-2,q>p+1$ 时绝对收敛；当 $p>-2$，$p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛.

【2382】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x.$

解 当 $n\leqslant 0$ 时，积分显然是发散的.

当 $n>0$ 时，首先考虑积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$ $(a>1)$. 由于

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x,$$

而

$$\left|\int_a^A\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\cos\left(a+\frac{1}{a}\right)-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2.$$

又当 x 充分大时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=nx^{n-3}\left(x^2-\frac{n-2}{n}\right)>0,$$

故当 x 充分大时，函数 $x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ 是递增的，从而，函数 $\frac{1}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$ 当 $x\to+\infty$ 时递减趋于零. 由此可知，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$ 当 $n>0$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx\ (0<a'<1)$. 设 $x=\frac{1}{t}$,则

$$\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx=\int_{\frac{1}{a'}}^{+\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}}dt,$$

由前所述,此积分仅当 $2-n>0$ 即当 $n<2$ 时收敛.

请注意,$\int_{a'}^{a}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx\ (0<a'<1<a)$ 是一个通常的积分,它对任意 n 均有意义. 于是,当 $0<n<2$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

收敛.

可以证明:积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 当 $0<n<2$ 时发散. 事实上,

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\geqslant\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^n},$$

而当 $0<n\leqslant1$ 时,积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ 显然发散,积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^n}dx$ 收敛(仿前半段证明),故当 $0<n\leqslant1$ 时,积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散,从而,当 $0<n\leqslant1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散.

对于 $1<n<2$ 的情况,可考虑对积分作变换 $x=\frac{1}{t}$,则得

$$\int_0^{a}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx=\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|}{t^{2-n}}dt.$$

仿前可知,当 $0<2-n\leqslant1$ 即当 $1\leqslant n<2$ 时,积分

$$\int_0^{a}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

发散. 从而,当 $1<n<2$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散.

最后我们得到:当 $0<n<2$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ 条件收敛.

【2383】$^+$ $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$,式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式,且若 $x\geqslant a$, $P_n(x)>0$.

解 今仿 2381 题解之,设

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,\quad P_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

其中 m,n 是非负整数,$a_0\neq0,b_0\neq0$.

(1) 若 $n>m+1$,可取 $\alpha>0$ 充分小,使 $n-\alpha>m+1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n-m-\alpha}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^nP_m(x)}{x^mP_n(x)}\right|\frac{|\sin x|}{x^\alpha}=0,$$

而 $n-m-\alpha>1$,故积分 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$ 绝对收敛.

(2) 若 $n=m+1$. 我们证明此时 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 条件收敛. 事实上，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}=\frac{a_0}{b_0}$，故存在 $A_0>a$，使当 $x\geqslant A_0$ 时，恒有 $\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|>\frac{|a_0|}{2|b_0|}$，于是，

$$\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|\mathrm{d}x=\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{|a_0|}{2|b_0|}\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=+\infty,$$

故 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|\mathrm{d}x$ 发散. 此外，易知($n=m+1$)时

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'=\frac{1}{[P_n(x)]^2}\left\{-a_0b_0x^{2m}-2a_1b_0x^{2m-1}+\cdots+(a_{m-1}b_{m+1}-a_mb_m)\right\},$$

故若 $a_0b_0>0$，则当 x 充分大时，$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'<0$，函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 递减；若 $a_0b_0<0$，则当 x 充分大时，$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'>0$，函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 递增. 总之，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 单调地趋于零. 又显然可知 $\left|\int_a^A\sin x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，因此，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

(3)若 $n<m+1$. 由于 n,m 都是非负整数，故 $n\leqslant m$. 因此，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ +\infty, & n<m \text{ 且 } a_0b_0>0,\\ -\infty, & n<m \text{ 且 } a_0b_0<0.\end{cases}$$

于是，存在 $A^*>a$ 及 $\tau>0$，使当 $x\geqslant A^*$ 时，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 保持定号且 $\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|>\tau$. 今对任何 $A>a$，可取正整数 N，使 $2N\pi+\frac{\pi}{4}\geqslant\max\{A,A^*\}$. 令 $A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}$，$A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}$，则

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x\right|>\tau\int_{A'}^{A''}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\tau\sqrt{2}}{2},$$

它不能小于任意的 ε $\left(0<\varepsilon<\frac{\tau\sqrt{2}}{2}\right)$，故 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 发散.

最后，我们得出：$\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 当 $n>m+1$ 时绝对收敛；当 $n=m+1$ 时条件收敛.

【2384】 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则当 $x\to+\infty$ 时是否必有 $f(x)\to 0$? 研究例子：

(1) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$.

解 不一定. 例如，

(1) 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$ 收敛. 事实上，它是 2380 题之特例：$p=0,q=2$. 但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$ 不存在；

(2) 先证积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛. 事实上，对任何 $A>0$，存在唯一的非负整数 n，使 $\sqrt{n}\leqslant A<\sqrt{n+1}$. 显然 $A\to+\infty$ 相当于 $n\to\infty$. 当 $\sqrt{k}\leqslant x<\sqrt{k+1}$ (k—非负整数)时，$[x^2]=k$. 于是，

$$\begin{aligned}\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}(-1)^k\mathrm{d}x+(-1)^n(A-\sqrt{n})\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}+(-1)^n(A-\sqrt{n}).\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 递减趋于 0(当 $k\to\infty$ 时)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 存在有限(参看 2656 题前面的变号级数的莱布尼茨判别法)，设为 S. 又显然

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty \text{时}),$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=S$，因此，积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛. 但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x^2]}$ 不存在.

【2385】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且无界，可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

看作对应积分和 $$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},\Delta x_i=x_{i+1}-x_i)$$

的极限？

提示 不能.

解 不能. 因为若 $c(a\leqslant c\leqslant b)$ 是瑕点，则对于 $[a,b]$ 的任何分法，不论其 $\max|\Delta x_i|$ 多么小，当分法确定以后，设 $c\in[x_j,x_{j+1}]$，则总可以取 ξ_j，使 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任何预先给定的值. 因此，当 $\max|\Delta x_i|\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能具有有限极限.

【2386】 设 $$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

收敛，函数 $\varphi(x)$ 有界，则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

是否必定收敛？举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛，问积分(2)的收敛性如何？

解题思路 不一定收敛. 例如，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，$\varphi(x)=\sin x$ 有界，但是，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 其次，设 $|\varphi(x)|\leqslant L$，则由 $|f(x)\varphi(x)|\leqslant L|f(x)|$ 及 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，即知 $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

解 不一定. 例如，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛*)，且 $\varphi(x)=\sin x$ 有界，但是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 是发散的**).

若积分(1)绝对收敛，$\varphi(x)$ 有界，则积分(2)一定是绝对收敛的. 事实上，设 $|\varphi(x)|\leqslant L$，则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L|f(x)| \quad \text{及} \quad \int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

的收敛性即可获证.

*) 利用 2378 题的结果.

**) 利用 2368 题的结果.

【2387】 证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 为单调函数，则

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)^{*)}.$$

证明思路 不妨设 $f(x)$ 单调递减（若 $f(x)$ 单调递增，可用 $-f(x)$ 代替 $f(x)$ 即可）. 用反证法易证，当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)\geqslant 0$. 任给 $\varepsilon>0$，由于 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故存在 $A>a$，使当 $x>A$ 时，恒有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但是，$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right|=\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)\left(x-\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}f(x),$$

故当 $x>A$ 时，$0\leqslant xf(x)<\varepsilon$. 于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$，即 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

证 不妨设 $f(x)$ 单调递减. 先证当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)\geqslant 0$. 若不然，则存在点 $c\geqslant a$，使 $f(c)<0$. 由于 $f(x)$ 单调递减，故当 $x\geqslant c$ 时，$f(x)\leqslant f(c)$，从而，

$$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_c^{+\infty} f(c)\mathrm{d}x=-\infty.$$

因此，积分 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，这与积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾. 于是，$f(x)$ 为非负的单调函数.

下面证明 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$. 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $A>a$，使当 $x>A$ 时，恒有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但是，$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|=\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)\left(x-\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}f(x)$，故当 $x>A$ 时，$0\leqslant xf(x)<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0 \quad 或 \quad f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果 $f(x)$ 单调递增，则可考虑 $-f(x)$（它是单调递减的）. 同法可证得 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*） *原题为 $f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$，现在的结果更好.*

【2388】 设函数 $f(x)$ 在区间 $0<x\leqslant 1$ 内是单调函数，且在点 $x=0$ 的邻域内是无界的，证明：若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内是单调递减的. 这时 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$. 先设 $f(x)\geqslant 0$ $(0<x\leqslant 1$ 时). 由于积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，故把区间 $[0,1]$ n 等分后，即得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}<\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

另一方面，又有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$. 从而就有

$$0<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)<\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x=0$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

如果不满足 $f(x)\geqslant 0$，即 $f(x)$ 可正可负. 则函数 $\varphi(x)=f(x)-f(1)$ 满足 $\varphi(x)\geqslant 0$ $(0<x\leqslant 1)$，且同样是单调递减，$\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=+\infty$. 故根据已证的结果，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(1)\right]=\int_0^1[f(x)-f(1)]\mathrm{d}x,$$

由此即得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

当 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增时（这时 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$），只需对函数 $-f(x)$ 应用上述结果即获证.

【2389】 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $0<x<a$ 内是单调的，且 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x)=0$.

证 不妨设 $f(x)$ 在 $0<x<a$ 单调递减. 先设存在 $0<\delta<a$ 使当 $0<x<\delta$ 时，$f(x)\geqslant 0$. 这时，当 $0<x<\delta$ 时，有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p \mathrm{d}t = C_p x^{p+1} f(x)\geqslant 0,$$

其中

$$C_p=\begin{cases}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+1}, & p\neq -1,\\ \ln 2, & p=-1.\end{cases}$$

故 C_p 是正的常数. 于是，由 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在，知 $\lim\limits_{x\to+0}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t=0$，

从而，

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0.$$

再设不存在上述 δ. 于是，由 $f(x)$ 的递减性知，当 $0<x<a$ 时，恒有 $f(x)<0$. 于是，当 $0<x<\frac{a}{2}$ 时，有

$$\int_{x}^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x)\int_{x}^{2x} t^p \mathrm{d}t = C_p^* x^{p+1} f(x)<0,$$

其中

$$C_p^*=\begin{cases}\dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, & p\neq -1,\\ \ln 2, & p=-1.\end{cases}$$

故 C_p^* 也是正的常数. 于是，

$$|x^{p+1}f(x)|<\frac{1}{C_p^*}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t\right|.$$

由 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 的存在性知，$\lim\limits_{x\to+0}\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t=0$，从而，$\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x)=0$. 证毕.

【2390】 证明：(1) $V.P.\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=0$； (2) $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=0$； (3) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=0$.

提示 从定义出发.

证 (1) 由于 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon-\ln 1+\ln 1-\ln\varepsilon)=0$，

所以，$V.P.\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=0$；

(2) 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}+\int_{1+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right|=0,$$

所以，$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=0$；

(3) 由于 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\sin x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(-\cos b+\cos b)=0$，

所以，$V.P\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=0$.

【2391】 证明：当 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$ 时存在 $\mathrm{li}x=V.P.\int_0^x\frac{\mathrm{d}\xi}{\ln\xi}$ *).

证 当 $0\leqslant x<1$ 时，由于 $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{1}{\ln\xi}=0$，故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x=0$ 处补充定义后成为连续函数，于是，积分存在.

当 $x>1$ 时，首先注意到下面这样一个结论：当 $a<c<b$ 时，

$$V.P.\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-c}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-c}\right)=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

其次，利用具比亚诺型余项的泰勒公式，有

$$\ln x=(x-1)+[\alpha(x)-1]\frac{(x-1)^2}{2},$$

式中$\lim\limits_{x\to1}\alpha(x)=0$. 由此即得 $$\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1+\frac{[\alpha(x)-1]}{2}(x-1)},$$

上式等式右端的第二项在 $x=1$ 的附近保持有界,且对于任意的 x 值连续,因而是可积分的. 第一项的"主值"如前所述,它是存在的.

于是,当 $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$ 时,$\mathrm{li}x$ 存在.

*) 原题误为"当 $x\geqslant0$ 时,…".

求下列积分:

【2392】 $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

提示 注意点 $x=1$ 及 $x=2$ 为被积函数的瑕点,从而,由定义即易获解.

解 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}+\int_{2+\eta}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{\eta}{1-\eta}-\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{\eta}{1+\eta}\right)$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)=-\ln2=\ln\frac{1}{2},$$

所以, $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}=\ln\frac{1}{2}$.

【2393】 $V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

解 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|\ln(1-\varepsilon)|-\ln(\ln2)+\ln(\ln2)-\ln|\ln(1+\varepsilon)|]$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{-1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right|=\ln1=0,$$

所以, $V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=0$.

【2394】 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan b-\arctan(-b)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right]=2\lim_{b\to+\infty}\arctan b=\pi,$$

所以, $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi$.

【2395】 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}x$.

解 由于 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\arctan x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[b\arctan b-(-b)\arctan(-b)-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right]=0,$

所以, $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}x=0$.

§5. 面积的计算法

1° 直角坐标系中的面积 以两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ $[y_2(x)\geqslant y_1(x)]$ 与两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(a<b)$ 为界的图形 $A_1A_2B_2B_1$（图 4.14），其面积等于

$$S=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x.$$

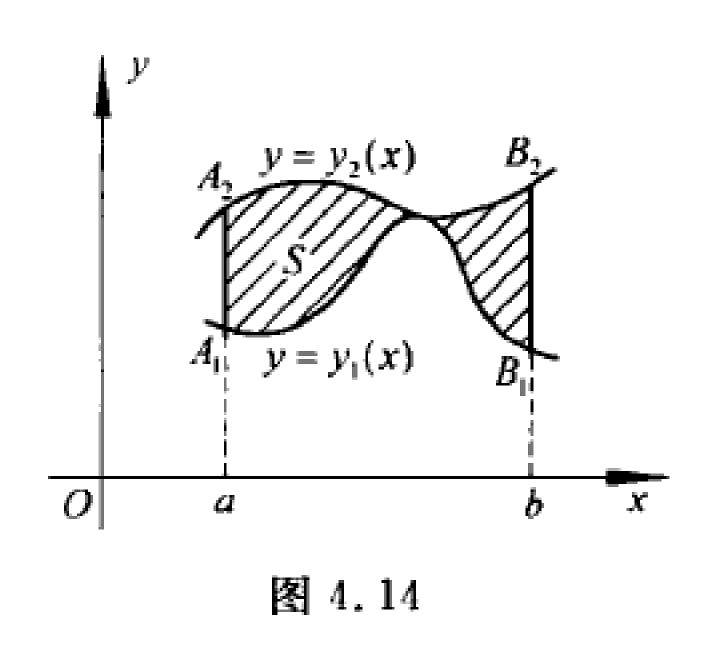


图 4.14

图 4.15

2° 用参数方程给出的曲线所围成的面积 若 $x=x(t),y=y(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 为一分段光滑的简单封闭曲线 C 的参数方程，并且沿曲线的环绕方向为逆时针方向，使得该曲线所围图形总是位于其左侧（图 4.15），则此图形的面积 S 等于

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T x(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

或
$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]\mathrm{d}t.$$

3° 极坐标系中的面积 以连续的曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 为界的扇形 OAB（图 4.16）. 其面积 S 等于

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

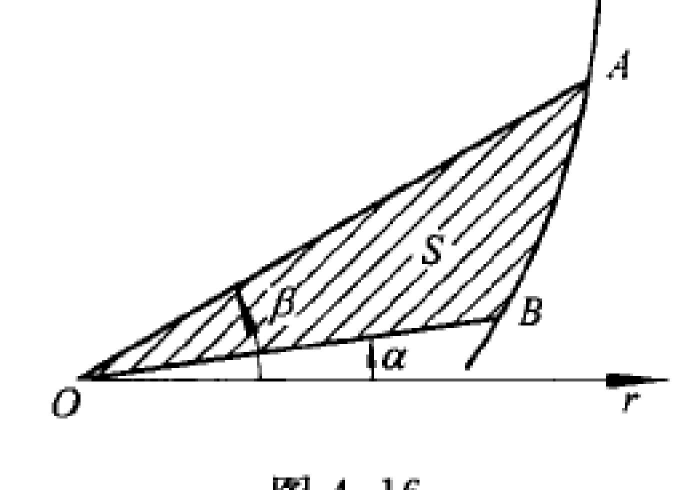


图 4.16

【2396】 证明：正抛物线弓形的面积等于 $S=\frac{2}{3}bh$，式中 b 为弓形的底，h 为高（图 4.17）.

提示 易知抛物线的方程为 $y=-\frac{4h}{b^2}x^2+h$.

证 设抛物线的方程为 $y=Ax^2+Bx+C$，

则当 $x=\pm\frac{b}{2}$ 时，得 $y=\frac{Ab^2}{4}\pm\frac{Bb}{2}+C=0$；

当 $x=0$ 时，得 $y=C=h$. 解之得 $A=-\frac{4h}{b^2}$，$B=0$.

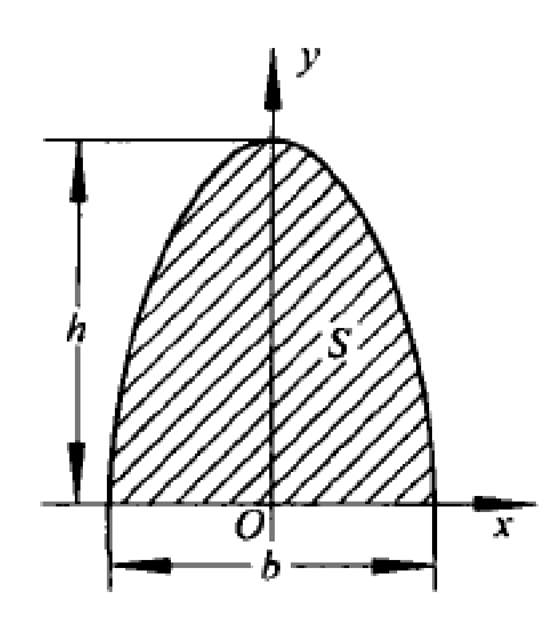


图 4.17

从而，$y=-\frac{4h}{b^2}x^2+h$. 于是，所求的面积为



$$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{2}}=\frac{2}{3}bh.$$

求以下列直角坐标方程所给曲线为界的图形的面积*：

【2397】 $ax=y^2$，$ay=x^2$.

解 如图 4.18 所示，交点为 $A(a,a)$ 及 $O(0,0)$. 所求的面积为

---

* 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的.

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3a}x^3\right]\Bigg|_0^a=\frac{a^2}{3}.$$

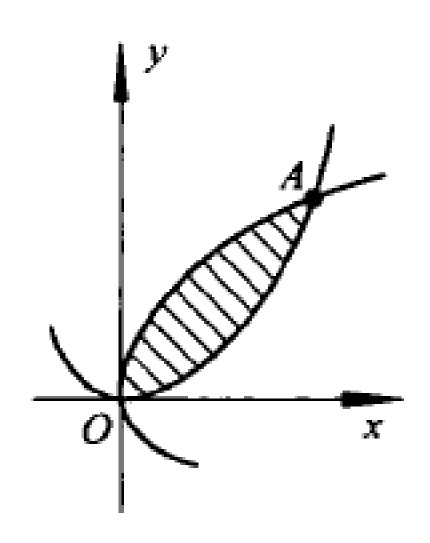


图 4.18

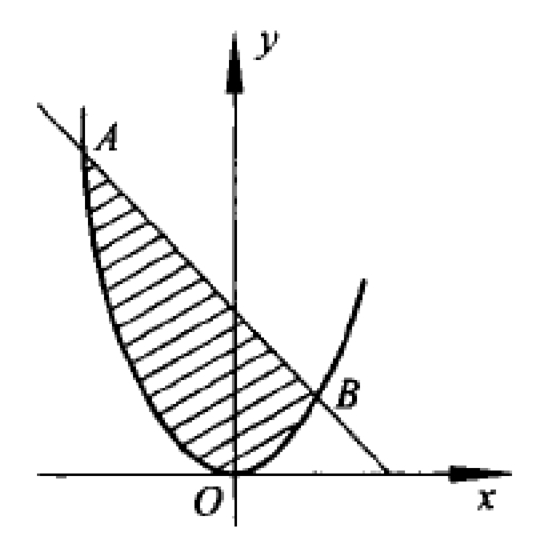


图 4.19

【2398】 $y=x^2$，$x+y=2$.

解 如图 4.19 所示，交点为 $A(-2,4)$ 及 $B(1,1)$. 所求的面积为

$$S=\int_{-2}^1[(2-x)-x^2]\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^1=4\ \frac{1}{2}.$$

【2399】 $y=2x-x^2$， $x+y=0$.

解 如图 4.20 所示，交点为 $A(3,-3)$ 及 $O(0,0)$. 所求的面积为

$$S=\int_0^3[(2x-x^2)-(-x)]\mathrm{d}x=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3=4\ \frac{1}{2}.$$

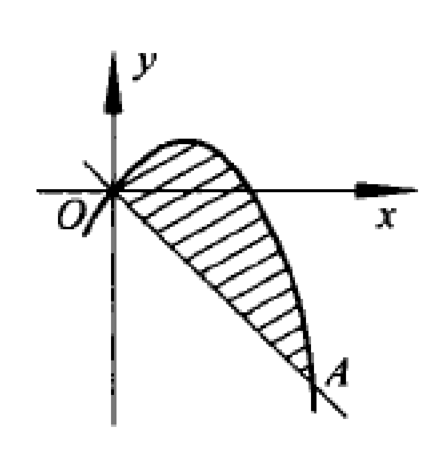


图 4.20

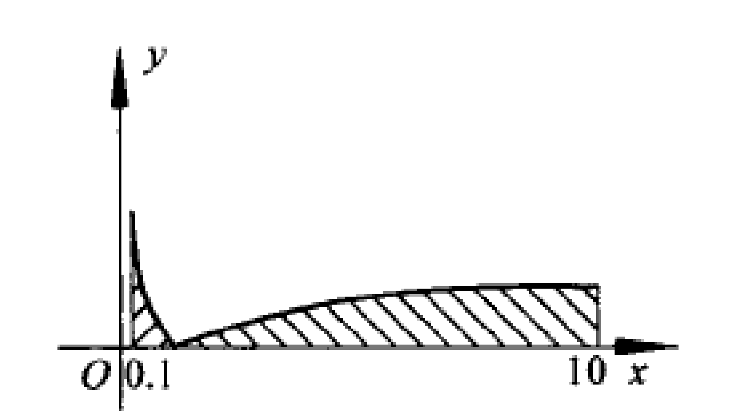


图 4.21

【2400】 $y=|\lg x|$， $y=0$， $x=0.1$， $x=10$.

解 如图 4.21 所示，所求的面积为

$$S=-\int_{0.1}^1\lg x\mathrm{d}x+\int_1^{10}\lg x\mathrm{d}x=(-x\lg x+x\lg e)\Bigg|_{0.1}^1+(x\lg x-x\lg e)\Bigg|_1^{10}=9.9-8.1\lg e\approx 6.38.$$

【2401】 $y=x$，$y=x+\sin^2x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 所求的面积为

$$S=\int_0^\pi(x+\sin^2x-x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{2}.$$

【2402】 $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$，$y=0$.

解 所求的面积为

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=2a^3\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=2a^3\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\arctan b=\pi a^2.$$

【2403】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解 所求的面积为

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a=\pi ab.$$

【2404】 $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

解 如图 4.22 所示，图形对称于原点. 所求的面积为

$$S=4\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{4}{3}a^3.$$

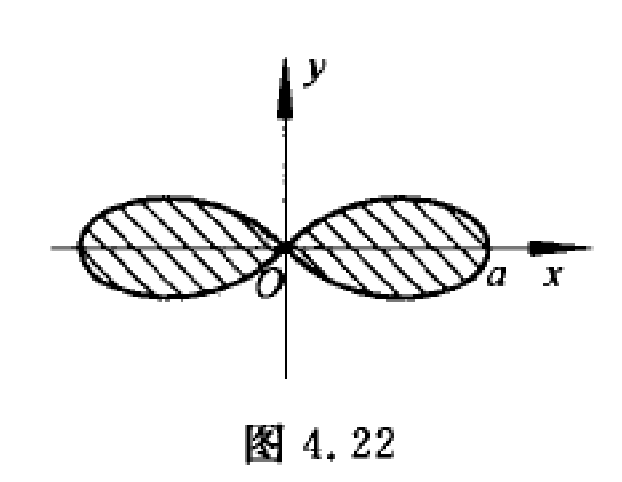


图 4.22

图 4.23



【2405】 $y^2=2px$, $27py^2=8(x-p)^3$.

解 曲线 $L_1:27py^2=8(x-p)^3$ 与曲线 $L_2:y^2=2px$ 在第一象限内的交点为 $A(4p,2\sqrt{2}p)$，如图 4.23 所示，所求的面积为

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p+\frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2p}y^2\right]\mathrm{d}y=2\left(py+\frac{9}{10}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6p}y^3\right)\Big|_0^{2\sqrt{2}p}=\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2.$$

【2406】 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\quad(AC-B^2>0)$.

解 解方程，得

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}\quad 及\quad y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

当 $B^2x^2-C(Ax^2-1)\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$ 时，y_1 及 y_2 才有实数值. 设 $a=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$，则所求的面积为

$$S=\int_{-a}^a(y_2-y_1)\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\int_{-a}^a\sqrt{C^2-(AC-B^2)x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\,\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

【2407】 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$（蔓叶线），$x=2a$.

提示 参阅 272 题的图像. 令 $t=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$，并利用 1921 题的递推公式.

解 所求的面积为

$$S=2\int_0^{2a}x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,\mathrm{d}x=16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}t^{*)}=16a^2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{2}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{(t^2+1)^3}\right]\mathrm{d}t$$

$$=16a^2\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{3}{8}\arctan t-\frac{5t}{8(t^2+1)}+\frac{t}{4(t^2+1)^2}\right]^{**)}\Big|_0^b=3\pi a^2.$$

*) 设 $t=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$.

**) 利用 1921 题的递推公式.

【2408】 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$（曳物线），$y=0$.

提示 所求面积为

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)\mathrm{d}y,$$

并注意 $y=0$ 为瑕点.

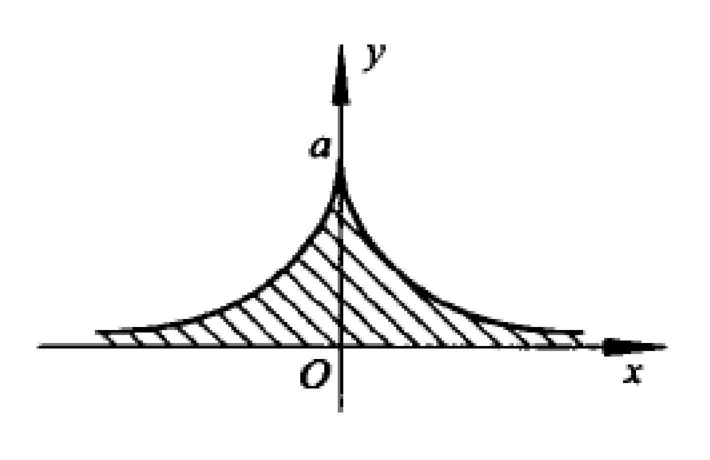


图 4.24

解 如图 4.24 所示，所求的面积为

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy-2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+a\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big|_\varepsilon^a-\frac{\pi a^2}{2}=\pi a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

【2409】 $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ $(x>0;\ n>-2)$.

解 所求的面积为

$$S=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}dx=2\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b\frac{2}{n+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\ ^{*)}=2\ \frac{2}{n+2}\lim_{b\to+\infty}\arctan t\Big|_0^b=\frac{2\pi}{n+2}.$$

*) 设 $t=x^{\frac{n+2}{2}}$.

【2410】 $y=e^{-x}\sin x$, $y=0$ $(x\geqslant 0)$.

提示 所求的面积为 $S=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$，并利用 1829 题的结果.

解 令 $\sin x=0$，得 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 当 $x\geqslant0$ 时，由于 $\sin x$ 在 $(\pi,2\pi)$，$(3\pi,4\pi)$，…，$((2k-1)\pi,2k\pi)$，… 中的值为负，而在 $(0,\pi)$，$(2\pi,3\pi)$，…，$(2k\pi,(2k+1)\pi)$，… 中的值为正，故所求的面积为

$$S=\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx-\int_\pi^{2\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x\,dx-\cdots+(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\cdots$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{-e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2}[e^{-(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi-e^{-k\pi}\cos k\pi]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(-1)^{k+1}[(-1)^{k+1}e^{-(k+1)\pi}-(-1)^ke^{-k\pi}]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2e^{-\pi}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2e^{-\pi}\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}+e^{-(n+1)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^\pi+1}{e^\pi-1}=\frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{2}\approx0.545.$$

【2411】 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2=8$ 的面积分为两部分，这两部分的比如何？

解 抛物线 $y^2=2px$ 和圆 $x^2+y^2=8$ 在第一象限内的交点为 $A(2,2)$.

设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2（图 4.25），则有

$$S_1=2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy=2\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt2}-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

及 $$S_2=8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

于是，它们之比为 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}}=\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

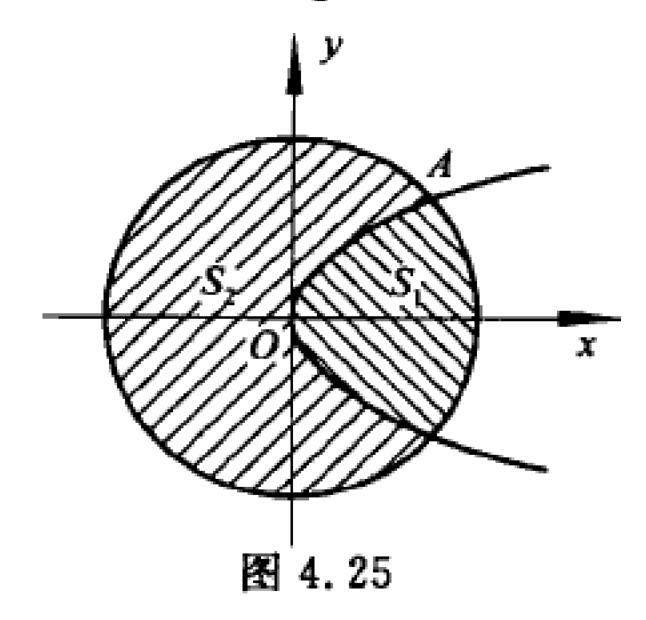


图 4.25

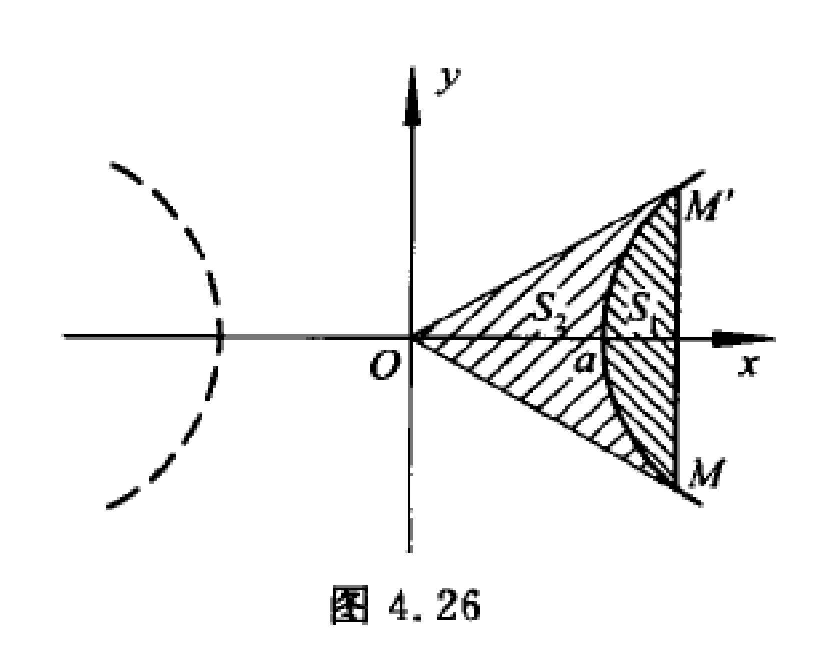


图 4.26

【2412】 把双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上的点 $M(x,y)$ 的坐标表示为双曲线扇形 $OM'M$ 的面积 S 的函数，此扇形以双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 为界，其中 $M'(x,-y)$ 是点 M 相对于 Ox 轴的对称点.

解 如图 4.26 所示，则有

$$\frac{S_1}{2}=\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]\Bigg|_a^x=\frac{1}{2}xy-\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}$$

及 $$S_2=2\left(\frac{xy}{2}-\frac{S_1}{2}\right)=a^2\ln\frac{x+y}{a}.$$

若记 $S_2=S$，则由上式得

$$x+y=a\mathrm{e}^{\frac{S}{a^2}}.\tag{1}$$

以(1)式代入 $x^2-y^2=a^2$ 中，易得

$$x-y=a\mathrm{e}^{-\frac{S}{a^2}}.\tag{2}$$

由(1)式及(2)式，解得

$$x=a\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{S}{a^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{S}{a^2}}}{2}=a\operatorname{ch}\frac{S}{a^2}\quad 及\quad y=a\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{S}{a^2}}-\mathrm{e}^{-\frac{S}{a^2}}}{2}=a\operatorname{sh}\frac{S}{a^2}.$$

求下列参数方程所给曲线所围图形的面积：

【2413】 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（摆线）及 $y=0$.

解 所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

由此可见，所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍.

【2414】 $x=2t-t^2$，$y=2t^2-t^3$.

解 当 $t=0$ 及 2 时，$x=0$，$y=0$；当 $0<t<2$ 时，$x>0$，$y>0$；当 $t<0$ 时，$x<0$，$y>0$；当 $t>2$ 时，$x<0$，$y<0$. 如图 4.27 所示，所求的面积为

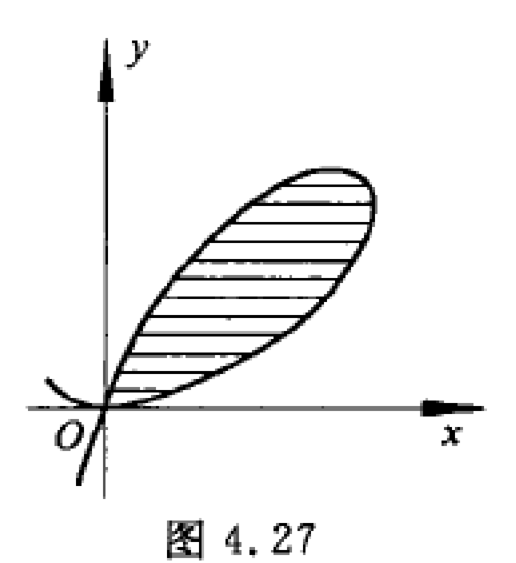


图 4.27

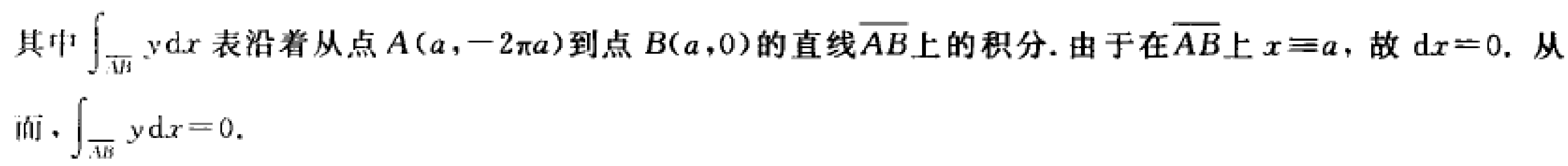


$$S=-\int_0^2(2t^2-t^3)\,2(1-t)\mathrm{d}t=-2\int_0^2(t^4-3t^3+2t^2)\mathrm{d}t=\frac{8}{15}.$$

【2415】 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$（圆的渐伸线）及 $x=a$，$y\leqslant 0$.

解 所求的面积为

$$S=-\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)at\cos t\mathrm{d}t-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x$$
$$=a^2\left(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x,$$



其中 $\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x$ 表沿着从点 $A(a,-2\pi a)$ 到点 $B(a,0)$ 的直线 $\overline{AB}$ 上的积分. 由于在 $\overline{AB}$ 上 $x\equiv a$，故 $\mathrm{d}x=0$. 从而，$\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x=0$.

于是，得 $S=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$.

【2416】 $x=a(2\cos t-\cos 2t)$，$y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

解 所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'_t-yx'_t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t-\cos 2t)a(2\cos t-2\cos 2t)-a(2\sin t-\sin 2t)a(-2\sin t+2\sin 2t)]\mathrm{d}t$$
$$=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t)\mathrm{d}t=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\mathrm{d}t=6\pi a^2.$$

【2417】 $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t, y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$（椭圆的渐屈线）.

解 如图 4.28 所示，所求的面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2}{b}\sin^3 t \frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

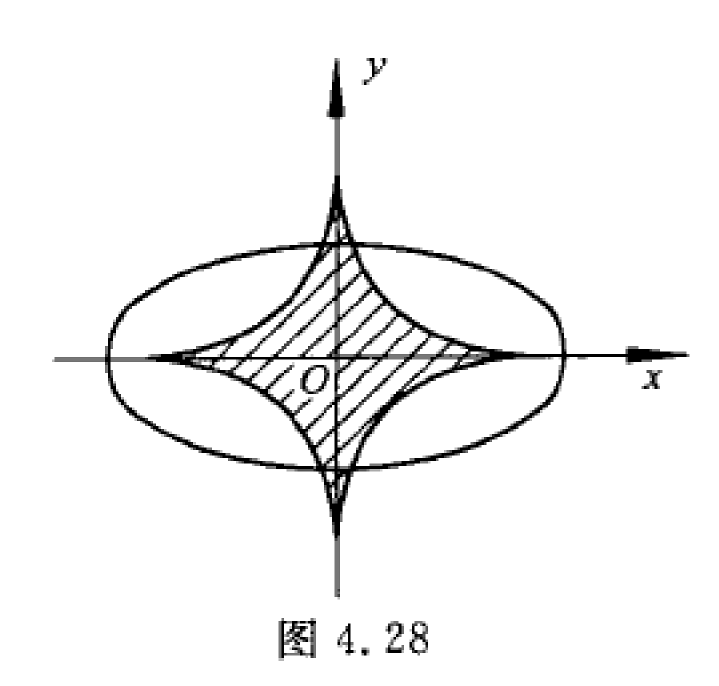


图 4.28

求下列极坐标方程所给曲线所围图形 S 的面积：

【2418】 $r^2=a^2\cos2\varphi$ （双纽线）.

解 如图 4.29 所示. 所求的面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi=a^2.$$

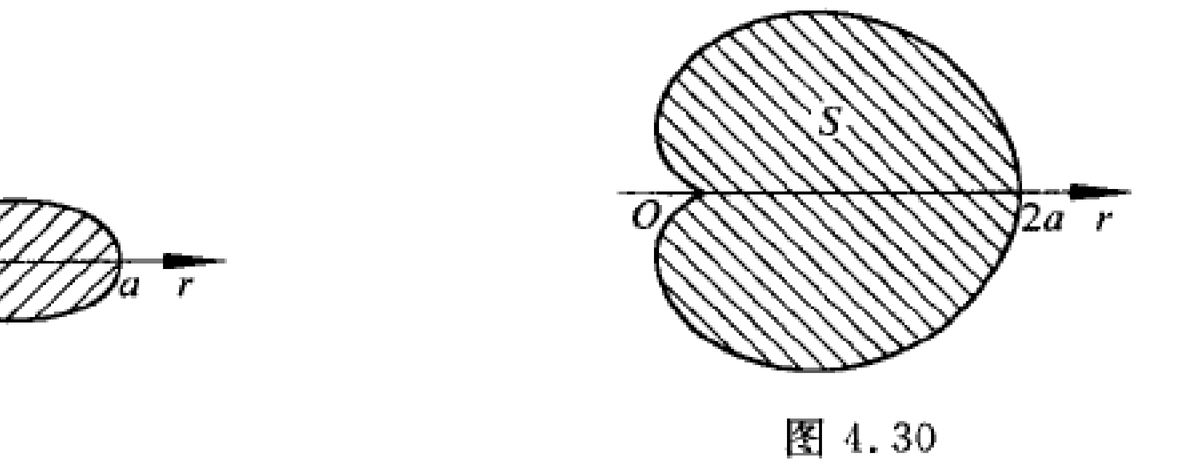


图 4.29　　图 4.30

【2419】 $r=a(1+\cos\varphi)$ （心脏线）.

解 如图 4.30 所示. 所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

【2420】 $r=a\sin3\varphi$ （三叶线）.

解 如图 4.31 所示，所求的面积为

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2 3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.$$

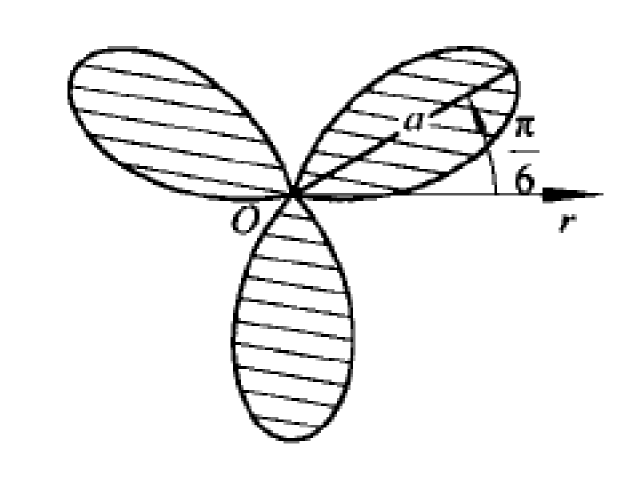


图 4.31

【2421】 $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$（抛物线），$\varphi=\frac{\pi}{4}$， $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

解 所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{(1-\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)=-\frac{p^2}{4}\left(\cot\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\cot^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3)^{*)}.$$

*) $\cot\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$.

【2422】 $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$（椭圆）.

解 所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{p^2\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=p^2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

设 $\tan\frac{\varphi}{2}=t$，并记 $a^2=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$，则有

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=\int\frac{2(t^2+1)\mathrm{d}t}{(1-\varepsilon)^2(t^2+a^2)^2}=\frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{2}{a(1-\varepsilon)^2}\arctan\frac{t}{a}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a}\right\}^{*)}+C.$$

当 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 时，$0\leqslant t<+\infty$，从而得一广义积分. 于是，经计算得

$$S=\left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2}+\frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\}p^2=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*）利用 1921 题的递推公式.

【2423】 $r=a\cos\varphi$，$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)\left[M(\frac{a}{2},0)\in S\right]$.

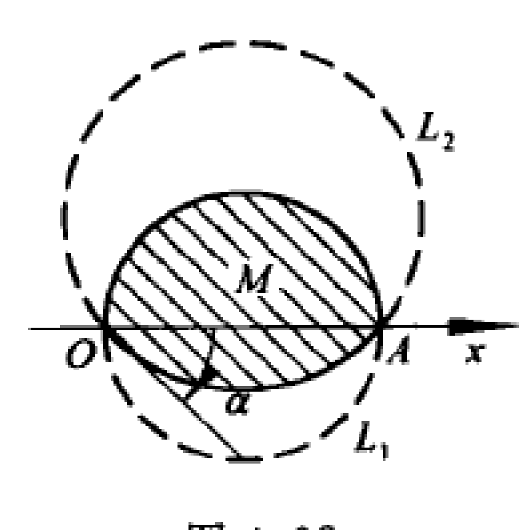


图 4.32

解 如图 4.32 所示，

$$|OA|=a,\quad \alpha=-\frac{\pi}{4},$$

阴影部分即为所求的面积.

曲线 $L_1: r=a\cos\varphi$，$L_2: r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$. 所求的面积为

$$S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2(\pi-1)}{4}.$$


【2424】$^+$ 求由曲线 $\varphi=r\arctan r$ 及二射线 $\varphi=0$ 及 $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.

解 当 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$，r 从 0 变到 $\sqrt{3}$，而

$$\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{r}{1+r^2}+\arctan r\right)\mathrm{d}r.$$

所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}r^2\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^3}{1+r^2}+r^2\arctan r\right)\mathrm{d}r=\left[\frac{1}{6}r^2-\frac{1}{6}\ln(1+r^2)+\frac{1}{6}r^3\arctan r\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

【2425】 求封闭曲线 $r=\frac{2at}{1+t^2}$，$\varphi=\frac{\pi t}{1+t}$ 所围图形的面积.

解 当曲线封闭时，t 由 0 变化到 $+\infty$，所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{\int_0^b\frac{\mathrm{d}t}{4(1+t)^2}-\frac{1}{4}\int_0^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right\}$$

$$=2\pi a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{1}{4}\arctan t-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right\}\Bigg|_0^b=\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

变为极坐标，求下列曲线所围图形的面积：

【2426】 $x^3+y^3=3axy$ （笛卡儿叶形线）.

提示 注意 $r=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，并令 $\tan\varphi=t$.

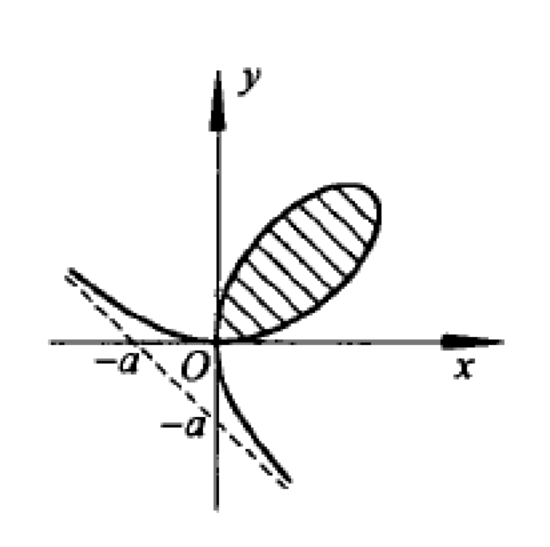


图 4.33

解 $r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$，于是，$r=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$.

当 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$r\geqslant0$，且当 $\varphi=0$ 及 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$r=0$. 所以，从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，叶形线位于第一象限部分所围成的面积，即为所要求的面积(图 4.33)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}\overset{*)}{=}\frac{9a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{3(1+t^3)}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{3a^2}{2}.$$

*）设 $\tan\varphi=t$.

【2427】 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

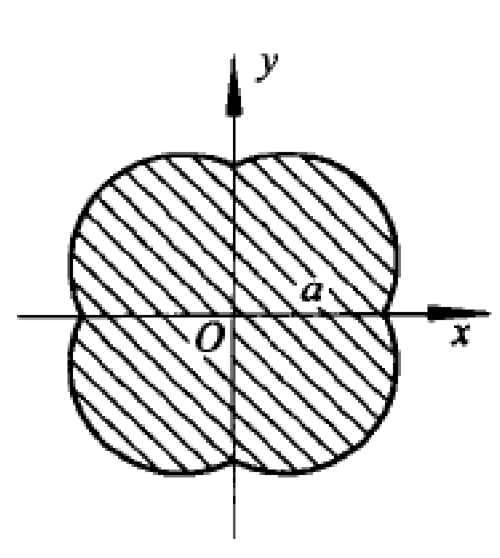


图 4.34

提示 注意 $r=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2-\sin^2 2\varphi}}$. 由于图像关于 x 轴及 y 轴均对称，故所求面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

解 $r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)=a^2r^2$，于是，$r=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2-\sin^2 2\varphi}}$.

如图 4.34 所示，所求的面积为

$$\begin{aligned}S&=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}\mathrm{d}\varphi\\&=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{2a^2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin t}\right)\mathrm{d}t\\&=\sqrt{2}a^2\left\{2\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2}-1\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2}+1\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2\sqrt{2}a^2\left\{\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)\right\}=2\sqrt{2}a^2\ \frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\pi a^2.\end{aligned}$$

【2428】 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ （双纽线）.

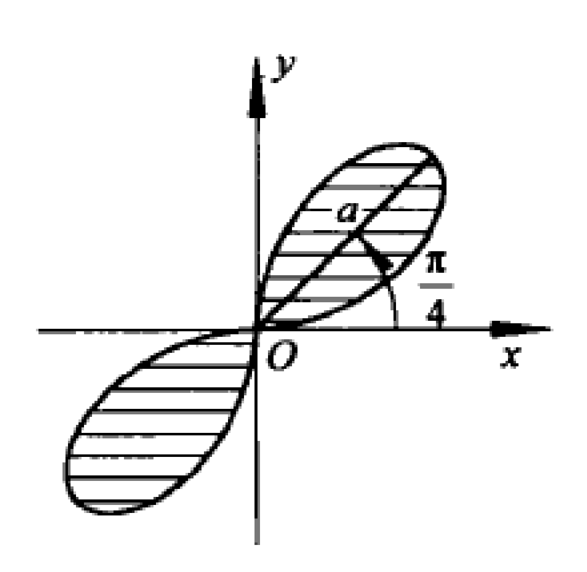


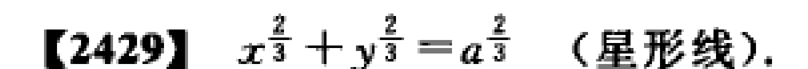
图 4.35

解 $r^2=a^2\sin2\varphi$（图 4.35），所求的面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin2\varphi\mathrm{d}\varphi=a^2.$$



用参数方程的形式给出下列曲线，再求曲线所围图形的面积：



【2429】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ （星形线）.

提示 令 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，它对应于四分之一的面积.

解 设 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，

其中 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，它对应于四分之一的面积. 所求的面积为其四倍，即

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

【2430】 $x^4+y^4=ax^2y$.

提示 令 $y=tx$.

解 设 $y=tx$，则曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{at}{1+t^4},\\[2mm] y=\dfrac{at^2}{1+t^4}.\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

利用对称性知，所求的面积为

$$S=-2\int_0^{+\infty}\frac{at^2}{1+t^4}\ \frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t=-2a^2\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t-3\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t\right).$$

因为

$$\int\frac{x^n\mathrm{d}x}{(a+bx^4)^m}=\frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b(a+bx^4)^{m-1}}-\frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)}\int\frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m}\mathrm{d}x^{*)},$$

所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t=-\frac{t^3}{5(1+t^4)^2}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t=\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t,$$

于是，$S=\dfrac{8}{5}a^2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}\ \mathrm{d}t$. 又因

$$\int \frac{x^n \mathrm{d}x}{(a+bx^4)^m}=\frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}}+\frac{4m-n-5}{4a(m-1)}\int \frac{x^n \mathrm{d}x}{(a+bx^4)^{m-1}}\ ^{**)},$$

所以，

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t=\frac{t^3}{8(1+t^4)^2}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{5}{8}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t=\frac{5}{8}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{5}{8}\left[\frac{t^3}{4(1+t^4)}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^4}\right]=\frac{5}{32}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t.$$

于是，$S=\frac{1}{4}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$. 利用

$$\int \frac{x^2}{a+bx^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{x^2-\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\sqrt{2}x+\sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2+\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\sqrt{2}x+\sqrt{\frac{a}{b}}}+2\arctan\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-x^2}\right\}^{***)}\quad(ab>0),$$

即得 $$\int\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+2\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right\}+C.$$

考虑到上述式子右端的函数 $\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 中的 $t=1$ 点不连续，并且

$$\lim_{t\to1+0}\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}=-\frac{\pi}{2}\quad 及\quad \lim_{t\to1-0}\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}=\frac{\pi}{2},$$

于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+2\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right\}\Bigg|_0^1+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+2\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right\}\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4},$$

最后得所求的面积为 $$S=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}a^2.$$

*） 参阅"函数表与积分表"(И. М. 雷日克，И. С. 格拉德什坦)第 64 页"(2.133)2".

**） 参阅同书第 64 页"(2.133)1".

***） 参阅同书第 64 页"(2.132)3".

§6. 弧长的计算法

1° **直角坐标系中的弧长** 一段光滑(连续可微)曲线 $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的弧长等于

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2° **参数方程所给曲线的弧长** 若曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T),$$

给出，式中 $x(t),y(t)\in C^{(1)}[t_0,T]$，则曲线 C 的弧长等于

$$s=\int_{t_0}^T\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3° **极坐标系中的弧长** 若 $$r=r(\varphi)\quad(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

式中 $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$，则相应曲线段的弧长等于

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长：

【2431】 $y=x^{\frac{3}{2}}\quad(0\leqslant x\leqslant 4)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

【2432】 $y^2=2px\quad(0\leqslant x\leqslant x_0)$.

解 $y'=\frac{p}{y}$，$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}$. 所求的弧长为

$$s=2\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{2}\int_0^{x_0}\sqrt{p+2x}\,d(\sqrt{x})$$

$$=2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{x(p+2x)}+\frac{p}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{p}{2}}\right)\right\}\Bigg|_0^{x_0}$$

$$=2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\left(\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right).$$

【2433】 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 至点 $B(b,h)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b=a\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{h^2-a^2}\,^{*)}.$$

*) 由于 $h=a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$，故 $\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{1}{a}\sqrt{h^2-a^2}$.

【2434】 $y=e^x\quad(0\leqslant x\leqslant x_0)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{x_0}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right)\Bigg|_0^{x_0}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x_0}}-1}{\sqrt{1+e^{2x_0}}+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}.$$

【2435】 $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\quad(1\leqslant y\leqslant e)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^e\frac{1+y^2}{2y}dy=\frac{e^2+1}{4}.$$

【2436】 $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant b<a)$.

解 $y'=\frac{2ax}{a^2-x^2}$，$\sqrt{1+y'^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$. 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}dx=a\ln\frac{a+b}{a-b}-b.$$

【2437】 $y=\ln\cos x\quad(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2})$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^a \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^a \frac{dx}{\cos x}=\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right).$$

【2438】 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\quad(0<b\leqslant y\leqslant a)$.

解 $\frac{dx}{dy}=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$，$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{a}{y}$. 所求的弧长为

$$s=\int_b^a \frac{a}{y}dy=a\ln\frac{a}{b}.$$

【2439】 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a\right)^{*)}$.

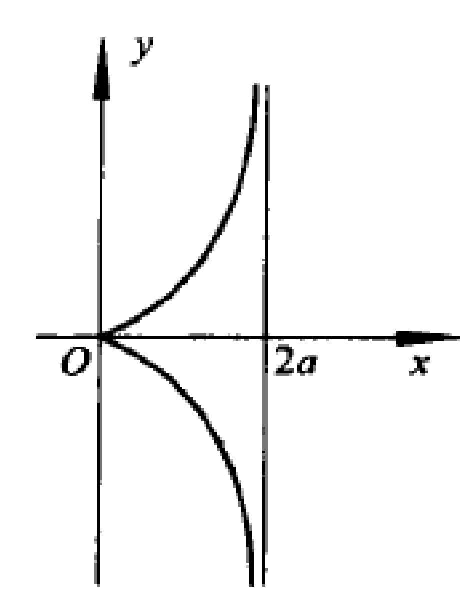


图 4.36

解 如图 4.36 所示. 设 $y=tx$，得 $\begin{cases}x=\frac{2at^2}{1+t^2},\\ y=\frac{2at^3}{1+t^2}.\end{cases}$

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a$ 时，$0\leqslant t\leqslant\sqrt{5}$（一半弧长）.

$$x_t'=\frac{4at}{(t^2+1)^2},y_t'=\frac{2at^4+6at^2}{(t^2+1)^2},\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$s=2\int_0^{\sqrt{5}}\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}dt=32a\int_0^{\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta(1+3\sin^2\theta)}{}^{**)}$$

$$=\frac{32a}{3}\int_1^{\frac{2}{3}}\frac{dz}{z^2\left(z^2-\frac{4}{3}\right)}{}^{***)}=\frac{32a}{3}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\ln\frac{z-\frac{2}{\sqrt{3}}}{z+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right\}\Bigg|_1^{\frac{2}{3}}$$

$$=4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

*) 原题误为 $y^2=\frac{x^2}{2a-x}$，现按原答案予以改正.

**) 设 $t=2\tan\theta$.

***) 设 $z=\cos\theta$.

【2440】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（星形线）.

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$\sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. 所求的弧长为

$$s=4\int_0^a\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx=6a.$$

【2441】 $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$，$y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$，$c^2=a^2-b^2$（椭圆的渐屈线）.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}$. 所求的弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,dt=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t\}^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

【2442】+ $x=a\cos^4 t$，$y=a\sin^4 t$.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}$. 所求的弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\,dt=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,d\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2a\left[\frac{\sin^2t-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\cos^4t+\sin^4t}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sin^2t-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4t+\sin^4t)}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})\right]a.$$

【2443】 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

【2444】 $x=a(\cos t+t\sin t)$， $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ （圆的渐伸线）.

解 $x_t'=at\cos t$， $y_t'=at\sin t$， $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=at$. 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}at\,dt=2\pi^2a.$$

【2445】$^+$ $x=a(\operatorname{sh}t-t)$， $y=a(\operatorname{ch}t-1)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{2}a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}$. 所求的弧长为

$$s=\int_0^T\sqrt{2}a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}\,dt=\sqrt{2}a\int_1^{\operatorname{ch}T}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}}d\theta^{*)}=2\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{\operatorname{ch}T}}\frac{\sin^2z}{\cos^3z}dz^{**)}$$

$$=2\sqrt{2}a\left\{\frac{\sin z}{2\cos^2z}-\frac{1}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right\}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\sqrt{\operatorname{ch}T}}$$

$$=\sqrt{2}a(\sqrt{\operatorname{ch}T}\sqrt{1+\operatorname{ch}T}-\sqrt{2})-\sqrt{2}a[\ln(\sqrt{\operatorname{ch}T}+\sqrt{1+\operatorname{ch}T})-\ln(1+\sqrt{2})]$$

$$=2a\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\operatorname{ch}T}-1\right)-\sqrt{2}a\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{\sqrt{2}+1}^{***)}.$$

*） 设 $\theta=\operatorname{ch}t$.

**） 设 $\theta=\tan^2z$.

***） $\sqrt{1+\operatorname{ch}T}=\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}$.

【2446】 $r=a\varphi$ （阿基米德螺线）$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\left\{\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right\}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=a\left\{\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right\}.$$

【2447】 $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ 当 $0<r<a$.

解 $0<r<a$，$-\infty<\varphi<0$. 所求的弧长为

$$s=\int_{-\infty}^0\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi=a\sqrt{m^2+1}\int_{-\infty}^0e^{m\varphi}d\varphi=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

【2448】 $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cos\frac{\varphi}{2}$. 所求的弧长为

$$s=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a.$$

【2449】 $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

解 $r'=\dfrac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$， $\sqrt{r^2+r'^2}=\dfrac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}$. 所求的弧长为

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}d\varphi=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^3\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec\frac{\varphi}{2}\left(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=p\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\,d\left(\sec\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$=2p\left\{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)+\frac{\sec\frac{\varphi}{2}}{2}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}-\frac{1}{2}\ln\left(\sec\frac{\varphi}{2}+\tan\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=p\left\{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right\}.$$

【2450】 $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant3\pi)$（图 4.37）．所求的弧长为

$$s=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{3\pi a}{2}.$$

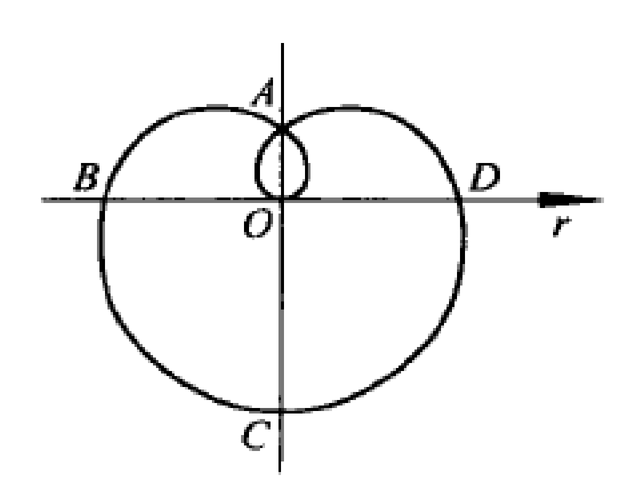


图 4.37

我们甚至可以证明：

1° 弧$\overset{\frown}{AB}$为弧$\overset{\frown}{OABC}$的三分之一；

2° $\overset{\frown}{OA}$，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$之间依次是等差的，其公差为$\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此，我们还可以证明更一般的情况：

曲线：$r=a\sin^n\frac{\theta}{n}$（$n$ 为正整数）之全长为

$$s=\begin{cases}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & n=2k,\\[2mm] \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & n=2k+1.\end{cases}$$

【2451】 $r=a\,\mathrm{th}\frac{\varphi}{2}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$.

解 $r'=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}$.

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{a}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{4\mathrm{sh}^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}+1}=\frac{a}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\mathrm{sh}^2\varphi+1}$$

$$=\frac{a\,\mathrm{ch}\varphi}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{a\,\mathrm{ch}\varphi}{1+\mathrm{ch}\varphi}=a\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{ch}\varphi}\right)=a\left(1-\frac{1}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}a\left[1-\frac{1}{2\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right]d\varphi=a\left(\varphi-\mathrm{th}\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a(2\pi-\mathrm{th}\pi).$$

【2452】 $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ $(1\leqslant r\leqslant3)$.

解 $r^2-2r\varphi+1=0$，两边对 φ 求导，得 $2rr'-2\varphi r'-2r=0$ 即 $r'=\frac{r}{r-\varphi}$，从而 $\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{r\varphi}{r-\varphi}=\frac{r^3+r}{r^2-1}$，$d\varphi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)dr$. 所求的弧长为

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{r^3+r}{r^2-1}\,\frac{r^2-1}{r^2}dr=\frac{1}{2}\int_1^3\left(r+\frac{1}{r}\right)dr=2+\frac{1}{2}\ln3.$$

【2453】 证明：椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的弧长等于正弦曲线 $y=c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

证 对于椭圆，其全长为

$$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt.$$

对于正弦曲线，其一波（x 由 0 到 $2\pi b$）之长为

$$s_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt.$$

所以，$s_1=s_2$，本题得证.

【2454】 抛物线 $4ay=x^2$ 沿 Ox 轴滚动. 证明：抛物线的焦点的轨迹是悬链线.

解 如图 4.38 所示，设抛物线切 Ox 轴于点 $A(s,0)$，O' 为抛物线的顶点，P' 为焦点，且 $O'Y'$ 为对称轴，$O'X'\perp O'Y'$，过 A 作 $AB\perp O'X'$.

引入参数 $O'N=t$，则由抛物线的性质易知：$P'N\perp Ox$，$O'B=2O'N=2t$. 从而有

$$AB=\frac{(2t)^2}{4a}=\frac{t^2}{a},\qquad AN=t\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}},$$

$$s=\int_0^{2t}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\,dx=t\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}+a\ln\left[\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right],$$

$$P'N=a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

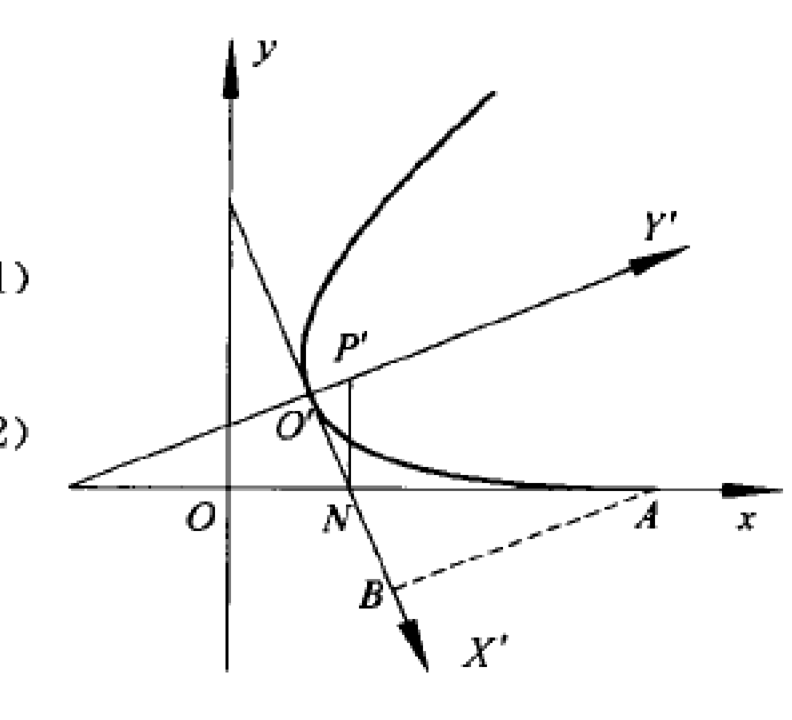


图 4.38

于是，焦点 P' 的坐标 x,y 由参数 t 表出：

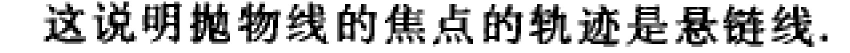
$$\begin{cases}x=s-AN=a\ln\left[\dfrac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}\right], & (1)\\[2mm] y=P'N=a\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}. & (2)\end{cases}$$

由(1)式得

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},\qquad e^{-\frac{x}{a}}=-\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加，得 $\quad e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=2\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$

再以(2)式代入上式，最后得 $\quad y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$


这说明抛物线的焦点的轨迹是悬链线.

【2455】 求曲线 $y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$ 的封闭部分与等周长圆周所分别围成的面积之比.

解 当 $x=0$ 及 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=0$. 此曲线所围图形的面积为

$$S_1=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$s=2\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

按题设有 $\frac{4}{3\sqrt{3}}=2\pi R$，所以，$R=\frac{2}{3\sqrt{3}\,\pi}$. 圆面积 $S_2=\pi R^2=\frac{4}{27\pi}$.

于是，
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0.73.$$

§7. 体积的计算法

1° 由已知横截面计算物体的体积 若物体的体积 V 存在，且 $S=S(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 为物体的横截面面积，此横截面经过点 x 且垂直于 Ox 轴，则 $V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

2° 旋转体的体积 曲边梯形

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

在这里 $y(x)$ 为单值连续函数. 在更一般的情形下，图形

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

绕 Ox 轴旋转所成的环状体的体积等于

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,\mathrm{d}x.$$

这里 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数

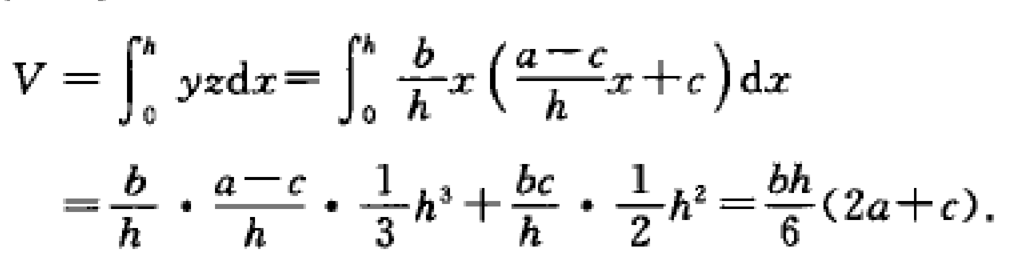
【2456】 求顶楼的体积，其底是边长等于 a 及 b 的矩形，其顶的棱边等于 c，而高等于 h.

解 如图 4.39 所示的顶楼，取 x 轴向下，则有

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{h}\quad 或\quad y=\frac{b}{h}x,\ \frac{z-c}{a-c}=\frac{x}{h}\quad 或\quad z=\frac{a-c}{h}x+c.$$

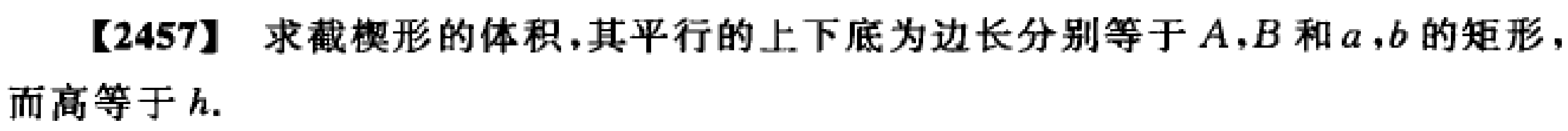
图 4.39

于是，所求顶楼的体积为



$$V=\int_0^h yz\,\mathrm{d}x=\int_0^h\frac{b}{h}x\left(\frac{a-c}{h}x+c\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{h}\cdot\frac{a-c}{h}\cdot\frac{1}{3}h^3+\frac{bc}{h}\cdot\frac{1}{2}h^2=\frac{bh}{6}(2a+c).$$



【2457】 求截楔形的体积，其平行的上下底为边长分别等于 A,B 和 a,b 的矩形，而高等于 h.

解 如图 4.40 所示，$OO'=\frac{A}{2}$，$QQ'=\frac{a}{2}$，$OQ=h$.

设 $OP=x$，则 $$PP'=\frac{a}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{A-a}{2}\right).$$

同样可得 $$LP'=\frac{b}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{B-b}{2}\right).$$

从而，面积

$$KLMN=ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

$$=f(x).$$

图 4.40

于是，所求截楔形的体积为 $V=\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{h}{6}[(2A+a)B+(2a+A)b]$.

【2458】 求截锥体的体积，其上下底为半轴长分别等于 A,B 和 a,b 的椭圆，而高等于 h.

解 同 2457 题，任一平行于上下底且距离下底为 x 的截面为一椭圆，其半轴分别为

$$a'=a+\left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)\quad 及\quad b'=b+\left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b),$$

从而，此截面的面积为

$$S(x)=\pi a'b'=\pi\left\{ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)\right\}.$$

于是，所求的体积为 $V=\int_0^h S(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$.

【2459】 求旋转抛物体的体积，其底为 S，而高等于 H.

解 不失一般性，假设抛物线方程为 $y^2=2px$，绕 Ox 轴旋转，如图 4.41 所示. 记 $OA=H$，$OB=x$，按假设有

$$S=\pi AC^2=\pi(2pH)=2\pi pH,$$

距原点为 x 的截面面积为

$$S(x)=\pi y^2=2\pi px.$$

于是，所求的体积为 $V=\int_0^H S(x)\mathrm{d}x=\pi pH^2=\frac{SH}{2}$.

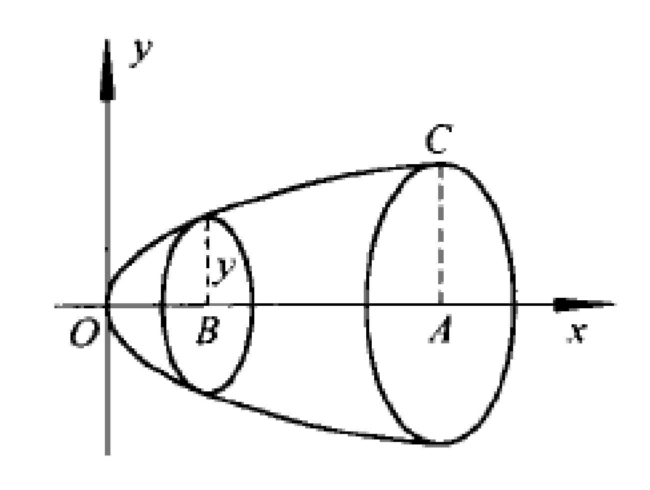


图 4.41

【2460】 设立体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S=S(x)$ 依下面的二次式规律变化：

$$S(x)=Ax^2+Bx+C \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

其中 A，B 及 C 为常数. 证明：此物体之体积等于

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

其中 $H=b-a$ （辛普森公式）.

证
$$V=\int_a^b(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$$
$$=\frac{b-a}{6}[2A(b^2+ab+a^2)+3B(a+b)+6C]$$
$$=\frac{H}{6}[(Aa^2+Ba+C)+(Ab^2+Bb+C)+A(a^2+2ab+b^2)+2B(a+b)+4C]$$
$$=\frac{H}{6}\left[S(a)+S(b)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

【2461】 物体是点 $M(x,y,z)$ 的集合，其中 $0\leqslant z\leqslant 1$，而且当 z 为有理数时，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；当 z 为无理数时，$-1\leqslant x\leqslant 0$，$-1\leqslant y\leqslant 0$. 证明：此物体的体积不存在，尽管相应积分

$$\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z=1.$$

证 显然，对任何 $0\leqslant z\leqslant 1$，不论 z 是有理数还是无理数，都有 $S(z)=1$. 从而，

$$\int_0^1 S(z)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z=1.$$

下证此物体(V)的体积不存在. 显然，无完全含于(V)内的多面体(X)存在，从而，这种(X)的体积的上确界为零，即(V)的内体积$V_*=\sup\{X\}=0$. 另一方面，(V)的外体积$V^*=\inf\{Y\}$，其中的下确界是对所有完全包含着(V)的多面体(Y)的体积 Y 来取的. 由于 $0\leqslant z\leqslant 1$ 中的有理数和无理数都在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 中是稠密的，故显然知，上述任何完全包含着(V)的多面体(Y)都必完全包含着点集$(Y_0)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1;0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，以及 $-1\leqslant x\leqslant 0,-1\leqslant y\leqslant 0\}$. 而$(Y_0)$又完全包含着$(V)$，并且$(Y_0)$的体积 $Y_0=2$. 由此可知$V^*=\inf\{Y\}=2$. 于是，$V_*\neq V^*$. 故此物体(V)的体积不存在.

求下列曲面所围成的体积：

【2462】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$z=\frac{c}{a}x$，$z=0$.

解 如图 4.42 所示，用垂直 Oy 轴的平面截割，得一直角三角形 PQR. 设 $OP=y$，则高 $QR=\frac{c}{a}x$，从而，它的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}x^2=\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是，所求的体积为 $V=2\int_0^b\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}abc$.

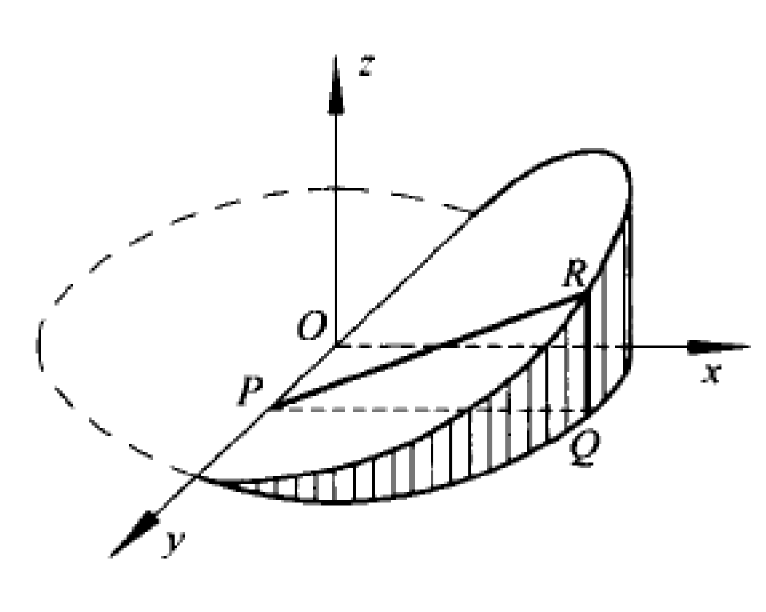


图 4.42

【2463】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （椭球面）.

提示 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球面，其截痕为一椭圆，易知其面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad -a\leqslant x\leqslant a.$$

解 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球面得截痕为一椭圆，它在 yOz 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

由此显见其半轴分别为

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad 及\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

从而，此椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad -a\leqslant x\leqslant a.$$

于是，所求的椭球面的体积为 $V=\int_{-a}^{a}S(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\pi bc\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc.$

【2464】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ z=\pm c.$

提示 方程表示的图形为单叶双曲面. 用平面 $z=h$ 截此曲面，其截痕为一椭圆，易知其面积为

$$S(h)=\pi ab\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right),\quad -c\leqslant h\leqslant c.$$

解 方程表示的图形为单叶双曲面，用平面 $z=h$ 截得椭圆

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

其面积为

$$S(x)=\pi ab\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right),-c\leqslant h\leqslant c.$$

于是，所求的体积为 $V=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)\mathrm{d}h=\frac{8}{3}\pi abc.$

【2465】 $x^2+z^2=a^2,y^2+z^2=a^2.$

提示 过点 $(0,0,z)$ 垂直于 Oz 轴作一平面，在所给立体上截出一个正方形，其面积为 $S(z)=a^2-z^2$，$0\leqslant z\leqslant a$，它对应于八分之一的体积.

解 如图 4.43 所示，过点 $M(0,0,z)$ 垂直于 Oz 轴作一平面，在所给立体上截出一正方形，其边长为 $\sqrt{a^2-z^2}$，所以，其面积为

$$S(z)=a^2-z^2,0\leqslant z\leqslant a.$$

于是，所求的体积为

$$V=8\int_0^a(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{16}{3}a^3.$$

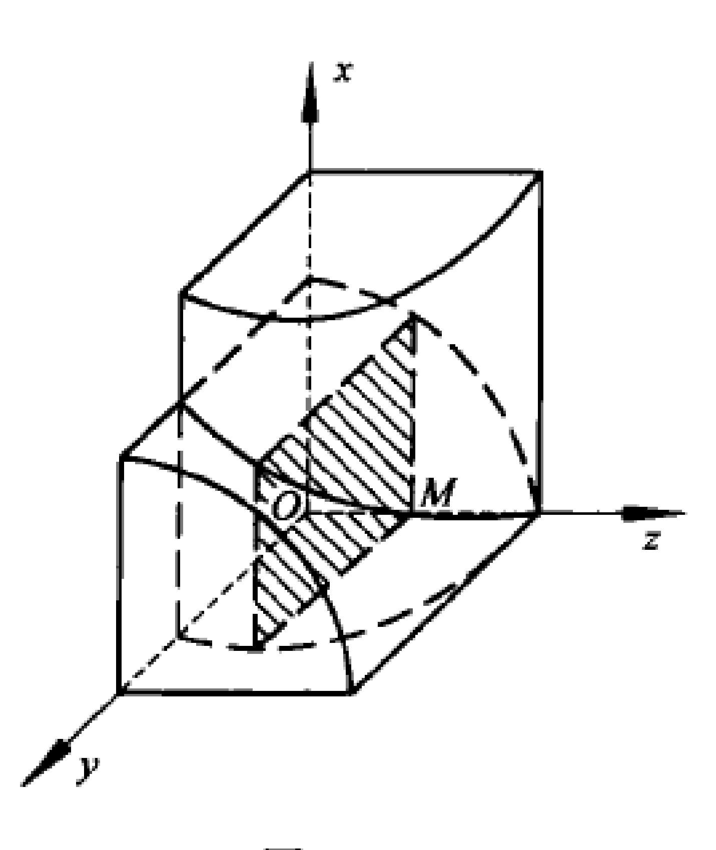


图 4.43

【2466】 $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=ax.$

解 如图 4.44 所示，过点 $M(x,0,0)$ 垂直于 Ox 轴作一平面，在所给立体上截出一曲边梯形，其曲边由方程

$$z=\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}$$

给出（上半面），其变化范围为：

$$-\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}\quad（如图中\ ABCD）.$$

从而，其截面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,dy$$

$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

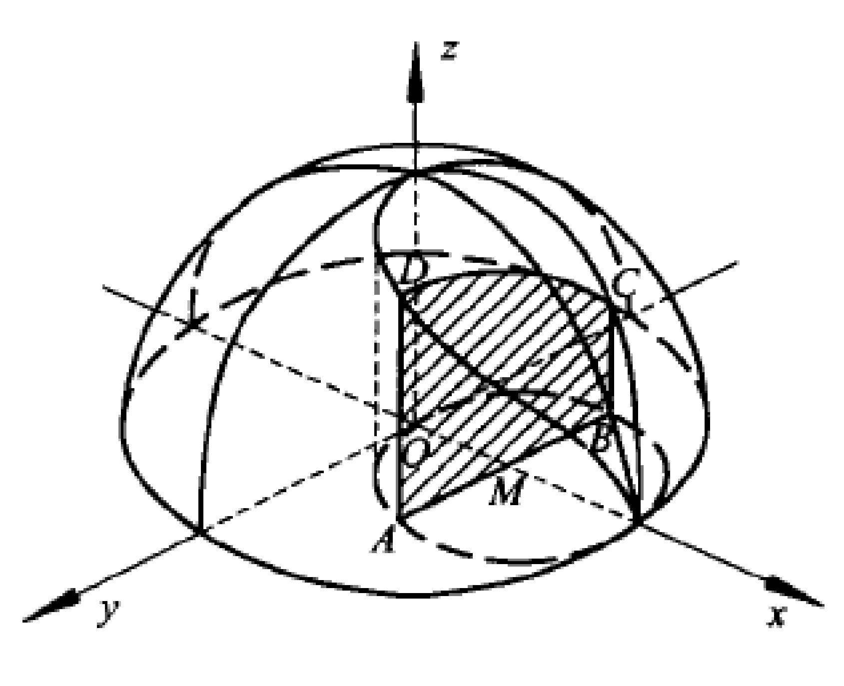


图 4.44

于是，所求的体积为

$$V=2\int_0^a S(x)\,dx$$

$$=2\int_0^a\left[a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]dx$$

$$=4\left\{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{5}a^3+\left[\left(\frac{\pi a^3}{4}-\frac{1}{2}a^3\right)-\left(\frac{1}{12}\pi a^3-\frac{13}{90}a^3\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

【2467】 $z^2=b(a-x)$， $x^2+y^2=ax$.

解 先求体积的四分之一部分，截面积为

$$S(x)=\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{b(a-x)}\,dy=\sqrt{ax-x^2}\ \sqrt{b(a-x)}.$$

从而， $\frac{1}{4}V=\int_0^a S(x)\,dx=\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\ \sqrt{b(a-x)}\,dx=\sqrt{b}\int_0^a\sqrt{x}(a-x)\,dx=\frac{4}{15}a^2\sqrt{ab}.$

于是，所求的体积为 $V=\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$

【2468】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}=1$ $(0<z<a)$.

解 固定 z，则截面为一椭圆，其面积为 $P(z)=\pi az$.

于是，所求的体积为 $V=\int_0^a P(z)\,dz=\pi a\int_0^a z\,dz=\frac{\pi a^3}{2}.$

【2469】⁺ $x+y+z^2=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 固定 z，则截面为一直角三角形，其面积为

$$P(z)=\frac{1}{2}(1-z^2)^2.$$

于是，所求的体积为 $V=\int_0^1\frac{1}{2}(1-z^2)^2\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1(1-2z^2+z^4)\,dz=\frac{4}{15}.$

注意 曲面 $x+y+z^2=1$ 关于平面 $z=0$ 对称，故它与三个平面 $x=0,y=0,z=0$ 围成的图形有两个，一个位于 Oxy 平面之上，一个位于 Oxy 平面之下，彼此是对称的(关于 Oxy 平面)，从而，它们的体积相等．我们以上求的是位于 Oxy 平面之上的那一个图形的体积.

【2470】 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$.

解 不妨设 $a>0$. 此为一有心椭球面. 固定 z，得在平面 xOy 上的投影为

$$x^2+xy+y^2+zx+zy+(z^2-a^2)=0,$$

此截面的面积为

$$S(z)=-\frac{\pi\Delta}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{}^{*)}=-\frac{8\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{z}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{z}{2}\\ \frac{z}{2}&\frac{z}{2}&z^2-a^2\end{vmatrix}=\frac{2z^2-3a^2}{4},$$

所以，
$$S(z)=\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$
z 的变化范围为适合下述不等式的集合：
$$2z^2-3a^2\leqslant 0,\quad 即\quad |z|\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$
于是，所求的体积为 $V=\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a}\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}dz=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3$.

*） 此公式详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第 330 目 7.

【2471】 证明：将平面图形 $a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant y(x)$，绕 Oy 轴旋转所成的旋转体的体积等于
$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$
这里 $y(x)$ 为单值连续函数.

证 $\Delta V_y=\pi[(x+\Delta x)^2-x^2]y(x)\approx 2\pi xy(x)\Delta x$. 于是，所求的体积为
$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

求下列曲线段旋转所成旋转体的体积：

【2472】 $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$绕 Ox 轴（半立方抛物线）.

解 所求的体积为 $$V_x=\pi b^2\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}}dx=\frac{3}{7}\pi ab^2.$$

【2473】 $y=2x-x^2$，$y=0$：(1)绕 Ox 轴；(2)绕 Oy 轴.

解 令 $y=0$ 得 $x=0$ 或 $x=2$. 于是，所求的体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\frac{16\pi}{15}$；　　(2) $V_y=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)dx=\frac{8\pi}{3}$.

【2474】 $y=\sin x$，　$y=0$　$(0\leqslant x\leqslant\pi)$：(1) 绕 Ox 轴；(2) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^\pi\sin^2 xdx=\frac{\pi^2}{2}$；　　(2) $V_y=2\pi\int_0^\pi x\sin xdx=2\pi^2$.

【2475】 $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$，　$y=b\left|\frac{x}{a}\right|$：(1) 绕 Ox 轴；(2) 绕 Oy 轴.

解 交点为(a,b)及$(-a,b)$. 所求的体积为

(1) $V_x=2\pi\int_0^a\left(b^2\frac{x^2}{a^2}-b^2\frac{x^4}{a^4}\right)dx=\frac{4\pi}{15}ab^2$；　　(2) $V_y=\pi\int_0^b\left(\frac{a^2y}{b}-\frac{a^2y^2}{b^2}\right)dy=\frac{\pi a^2b}{6}$.

【2476】 $y=e^{-x}$，　$y=0$　$(0\leqslant x<+\infty)$：(1) 绕 Ox 轴；(2) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2}$；　　(2) $V_y=\pi\int_0^1(-\ln y)^2dy=2\pi$.

【2477】 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$ 绕 Ox 轴.

解 $y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$，$y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$. 所求的体积为
$$V_x=\pi\int_{-a}^a(y_1^2-y_2^2)dx=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=2\pi^2a^2b.$$

【2478】 $x^2-xy+y^2=a^2$ 绕 Ox 轴.

解 原方程即 $y^2-xy+x^2-a^2=0$，从而，
$$y=\frac{x\pm\sqrt{4a^2-3x^2}}{2},$$
函数的定义域为$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}a,\frac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与 Ox 轴的交点分别为 $x=-a$ 与 $x=a$. 于是，所求的体积为

$$V_x=2\left\{\pi\int_0^a\frac{1}{4}(x+\sqrt{4a^2-3x^2})^2\mathrm{d}x+\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\left[\frac{1}{4}(x+\sqrt{4a^2-3x^2})^2-\frac{1}{4}(x-\sqrt{4a^2-3x^2})^2\right]\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a(4a^2-2x^2+2x\sqrt{4a^2-3x^2})\mathrm{d}x+2\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}x\sqrt{4a^2-3x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[2a^3-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{9}(4a^2-3x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a-\frac{2}{9}(4a^2-3x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\right]=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

【2479】 $y=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0\leqslant x<+\infty)$ 绕 Ox 轴.

解 函数定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$,$(n=0,1,2,\cdots)$. 于是,所求的体积为

$$V_x=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{5}\mathrm{e}^{-2x}(-2\sin x-\cos x)\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{\pi}{5}(\mathrm{e}^{-2\pi}+1)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4n\pi}=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}+1}{1-\mathrm{e}^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-\mathrm{e}^{-2\pi})}.$$

【2480】 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, $y=0$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y=2a$.

解 所求的体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=5\pi^2a^3$; (2) $V_y=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi^3a^3$;

(3) 作平移: $y=\bar{y}+2a$, $x=\bar{x}$ 则曲线方程为,

$$\bar{x}=a(t-\sin t),\quad \bar{y}=-a(1+\cos t),$$

及

$$\bar{y}=-2a.$$

于是,所求的体积为 $V_{\bar{x}}=\pi\int_0^{2\pi}[4a^2-a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)\mathrm{d}t=7\pi^2a^3$.

【2481】 $x=a\sin^3t$, $y=b\cos^3t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

(1) $V_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^2\cos^6t)(3a\sin^2t\cos t)\mathrm{d}t=6\pi ab^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9t\mathrm{d}t\right)=6\pi ab^2\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right)^{*)}$

$$=\frac{32}{105}\pi ab^2;$$

(2) 利用对称性,只需将上述答案中 a,b 对调即得 $V_y=\frac{32}{105}\pi a^2b$.

*) 利用 2282 题的结果.

【2482】 证明:把平面图形

$$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)\quad(\varphi 与 r 为极坐标)$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积等于 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

证 证法 1:

微小面积元 $\mathrm{d}S=r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ 绕极轴旋转所得微小环状体积元

$$\mathrm{d}V=2\pi r\sin\varphi\mathrm{d}S=2\pi r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

于是,所求的体积为

$$V=2\pi\int_\alpha^\beta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi)}r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

证法 2:

应用直角坐标系下的古尔丹第二定理*)来证明. 对于微小面积元,它的质心可以看成在点$\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi,\frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$处(图 4.45).

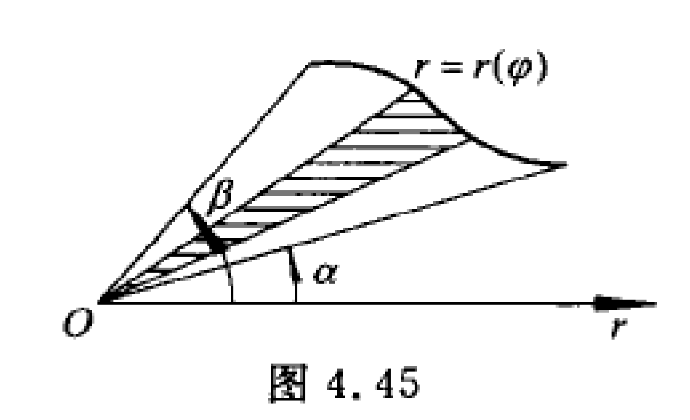


图 4.45

于是，面积元 $dS=\frac{1}{2}r^2d\varphi$，其所对应的绕极轴旋转所成旋转体的体积元为

$$dV=2\pi\ \frac{2}{3}r\sin\varphi\ \frac{1}{2}r^2d\varphi.$$

于是，所求的体积为 $V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$

*） 参看 2506 题.

求下列由极坐标或直角坐标给出的平面图形经旋转后所成旋转体的体积：

【2483】 $r=a(1+\cos\varphi)\quad(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$：

(1) 绕极轴； (2) 绕直线 $r\cos\varphi=-\frac{a}{4}$.

解 (1) $V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi=\frac{8\pi a^3}{3}$；

(2) 方法 1：所求的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^{\pi}r^2\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi+\frac{a}{4}\right)d\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi+\frac{\pi a^3}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi+\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi+\frac{\pi^2a^3}{2}$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\pi+\frac{\pi^2a^3}{2}=\frac{13}{4}\pi^2a^3.$$

注 (1) 在 V 的表达式中 $\frac{2}{3}r\cos\varphi$ 的系数 $\frac{2}{3}$ 是把微小面积元集中在其质心 $\left(\frac{2}{3}r,\varphi\right)$ 处得出的.

(2) $\int_0^{\pi}\cos^{2k+1}\varphi d\varphi=0,\quad\int_0^{\pi}\cos^{2k}\varphi d\varphi=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}\pi.$

方法 2：

心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 的面积为 $\frac{3\pi a^2}{2}$*），而其质心为 $\varphi_0=0$，$r_0=\frac{5}{6}a$**）. 根据古尔丹第二定理可得所求的体积为

$$V=2\pi\left(\frac{5a}{6}+\frac{a}{4}\right)\frac{3\pi a^2}{2}=\frac{13}{4}\pi^2a^3.$$

*） 利用 2419 题的结果.

**） 利用 2512 题的结果.

【2484】 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$：

(1) 绕 Ox 轴； (2) 绕 Oy 轴； (3) 绕直线 $y=x$.

解 (1) 曲线的极坐标方程为 $r^2=a^2(2\cos^2\varphi-1)$.

$$V_x=2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a^2(2\cos^2\varphi-1)\right]^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi.$$

由于 $\int(2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left[(\sqrt{2}\cos\varphi)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}d(\sqrt{2}\cos\varphi)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]+C,$$

所以，$V_x=-\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]=\frac{1}{4}\pi a^3\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right].$$

(2) 利用对称性知，所求的体积为

$$V_y=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3\cos\varphi d\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

令 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$，则 $\sqrt{\cos 2\varphi}=\cos x$，$\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x dx$，并且 x 的变化范围为 $(0,\frac{\pi}{2})$. 于是，得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x dx=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(3) 利用对称性知，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

若用本题(2)的变换，即得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x dx=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

【2485】 求图形 $a\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ 绕极轴旋转而成的旋转体的体积.

解 $r=a$ 与 $r=a\sqrt{2\sin 2\varphi}$，在第一象限部分的交点的极角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 及 $\beta=\frac{5\pi}{12}$. 利用对称性知，所求的体积应为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}[(a\sqrt{2\sin 2\varphi})^3-a^3]\sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(4\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi.$$

为求上述积分，令 $\quad I_1=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi,\quad I_2=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi,$

则有

$$I_2-I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}I_1,$$

即

$$I_2-\frac{5}{3}I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \tag{1}$$

又

$$I_2+I_1=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi d\varphi=\sqrt{2}\int\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}\sqrt{\cot\varphi}d\varphi.$$

令 $\tan\varphi=t$，就可将上述积分化成二项微分式的积分. 积分之，得

$$I_2+I_1=\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi})+\frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin 2\varphi})$$
$$+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)]. \tag{2}$$

(2)－(1)，得

$$I_1=\frac{3}{8}\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi})+\frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin 2\varphi})+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right\}+C.$$

从而，得

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{8}+\frac{3}{64}\pi.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\left[4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{3\pi}{64}\right)+\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\right]=\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P=2\pi\int_A^B y\,ds,$$

式中 ds 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

【2486】 $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}$. 于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}\,dx=\frac{3\pi}{a}\int_0^a x\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a\left(x+\frac{2a}{9}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\,d\left(x+\frac{2a}{9}\right)-\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{2a}{9}\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{4ax}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a-\frac{2\pi}{3}\left[\frac{x+\frac{2a}{9}}{2}\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}-\frac{\frac{4a^2}{81}}{2}\ln\left(x+\frac{2a}{9}-\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{13\sqrt{13}}{27}\pi a^2-\frac{11\sqrt{13}}{81}\pi a^2+\frac{4\pi a^2}{243}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}$$

$$=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

【2487】 $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x|\leqslant b)$ 绕 Ox 轴.

解 $y'=-\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}$, $\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-b}^{b}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-b}^{b}\frac{a}{2b}\cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}+\frac{4b^2}{2}\ln\left|\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right|\right]\Bigg|_0^b$$

$$=2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}}{2b}.$$

【2488】 $y=\tan x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sec^4x}=\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}$. 于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^4x+1}\,d\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}-\ln(\cos^2x+\sqrt{\cos^4x+1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right].$$

【2489】 $y^2=2px$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$:(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y_x'^2}=\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$. 于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}\,dx=\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right].$$

(2) $\sqrt{1+x_y'^2}=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$. 于是,所求的表面积为

$$P_y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}} x\sqrt{1+x_y'^2}\,dy$$
$$=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}\frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy=\frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$
$$=\frac{2\pi}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right].$$

【2490】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b\leqslant a)$:(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$, $yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$,

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+(yy')^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}.$$

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=\frac{2\pi b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率.

(2) 将 x,y 轴对调,即将 x 轴作为短轴. 于是,在所得出的 $y\sqrt{1+y'^2}$ 中仅需将 a 与 b 的位置对调一下即可,即

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}x^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

于是,所求的表面积为

$$P_y=2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\,dx=2\pi a\frac{1}{b}\left[\frac{x}{2}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{b}x+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right)\right]\Bigg|_{-b}^{b}$$
$$=2\pi a\left[\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{2c}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right)\right]=2\pi a\left[a+\frac{b^2}{2c}\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\right]=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$
$$=2\pi a\left\{a+\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]\right\}.$$

【2491】 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b\geqslant a)$ 绕 Ox 轴.

解 此圆分成两单值支

$$y=b+\sqrt{a^2-x^2} \quad 及 \quad y=b-\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=4\pi^2ab.$$

【2492】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 Ox 轴.

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $\sqrt{1+y'^2}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\cdot2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=-\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^a=\frac{12\pi a^2}{5}.$$

【2493】 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ $(|x|\leqslant b)$:(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\text{sh}^2\dfrac{x}{a}+1}=\text{ch}\dfrac{x}{a}$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi a\int_{-b}^{b}\text{ch}^2\frac{x}{a}\text{d}x=2\pi a\int_0^b\left(1+\text{ch}\frac{2x}{a}\right)\text{d}x=\pi a\left(2b+a\text{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

(2) $P_y=2\pi\displaystyle\int_0^b x\sqrt{1+y'^2}\text{d}x=2\pi\int_0^b x\text{ch}\frac{x}{a}\text{d}x=2\pi a\left(a+b\text{sh}\frac{b}{a}-a\text{ch}\frac{b}{a}\right)$.

【2494】 $\pm x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ 绕 Ox 轴.

解 $x'_y=\mp\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\sqrt{1+x'^2_y}=\dfrac{a}{y}$ $(0\leqslant y\leqslant a)$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\cdot2\pi\int_0^a y\frac{a}{y}\text{d}y=4\pi a^2.$$

【2495】 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant2\pi)$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y=2a$.

解 先求 $\text{d}s$:

$$\text{d}s=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,\text{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\text{d}t.$$

于是,所求的表面积为

(1) $P_x=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\text{d}t=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3u\text{d}u=\frac{64}{3}\pi a^2$.

(2) $P_x=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}\text{d}t=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\text{d}t=16\pi^2a^2$.

(3) 作平移 $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}+2a$ 则 $\bar{y}=-a(1+\cos t)$.

$$P_{\bar{x}}=\left|2\pi\int_0^{2\pi}\left[-a(1+\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\text{d}t\right]\right|^{*)}=\frac{32}{3}\pi a^2.$$

*) 在此取绝对值,是由于被积函数始终不为正之故.

【2496】 $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ 绕直线 $y=x$.

解 先求 $\text{d}s$:

$$\text{d}s=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,\text{d}t=\begin{cases}3a\sin t\cos t\text{d}t, & \dfrac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ -3a\sin t\cos t\text{d}t, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

利用对称性,并作旋转,即得所求的表面积为

$$P=2\left[2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{y-x}{\sqrt2}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\text{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{y-x}{\sqrt2}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\text{d}t\right]$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt2}\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3t-a\cos^3t)3a\sin t\cos t\text{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(a\sin^3t-a\cos^3t)3a\sin t\cos t\text{d}t\right]$$

$$=\frac{12\pi a^2}{\sqrt2}\left[\left(\frac15\sin^5t+\frac15\cos^5t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac15\sin^5t+\frac15\cos^5t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$=\frac35\pi a^2(4\sqrt2-1).$$

【2497】 $r=a(1+\cos\varphi)$,绕极轴.

解 $\text{d}s=\sqrt{r^2+r'^2_\varphi}\,\text{d}\varphi=2a\cos\dfrac{\varphi}{2}\text{d}\varphi$, $y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi=4a\cos^3\dfrac{\varphi}{2}\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

于是,所求的表面积为

$$P=2\pi\int_0^\pi 8a^2\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

【2498】 $r^2=a^2\cos2\varphi$;(1) 绕极轴； (2) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{2}$； (3)绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

解 (1) $y=a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi$, $\mathrm{d}s=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$. 于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(2) $x=a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi$ $(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4})$. 于是,所求的表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

(3) $x=a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi$, $y=a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi$, $\mathrm{d}s=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$.

注意到在 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内恒有 $x-y\geqslant0$,于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4\pi a^2.$$

【2499】 由抛物线 $ay=a^2-x^2$ 及 Ox 轴围成的图形绕 Ox 轴旋转而构成一旋转体.求其表面积与等体积球的表面积之比.

解 首先求此旋转体的表面积.

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a},$$

从而，
$$P_x=2\cdot2\pi\int_0^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a}\mathrm{d}x=8\pi\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\mathrm{d}x-\frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=8\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a^2}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^a-\frac{8\pi}{a^2}\left[\frac{x\left(2x^2+\frac{a^2}{4}\right)}{8}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right.$$

$$\left.-\frac{a^4}{128}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right]^{*)}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right];$$

其次,求旋转体的体积. $V_x=\pi\int_{-a}^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi a^3}{15}.$

设与其等体积球的半径为 R, 则 $\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{16\pi a^3}{15}$, $R=\sqrt[3]{\frac{4}{5}}a$. 于是,此球的表面积为

$$P=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2=\frac{8\pi a^2}{5}\sqrt[3]{10}.$$

最后得到
$$\frac{P_x}{P}=\frac{\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{\frac{8\pi a^2}{5}\sqrt[3]{10}}=\frac{5[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]}{128\sqrt[3]{10}}\approx1.013.$$

*) 利用 1820 题的结果.

【2500】 由直线 $x=\frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2=2px$ 围成的图形绕直线 $y=p$ 旋转而构成一旋转体,求其体积和表面积.

解 所求的体积为

$$V_{y=p}=\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p+\sqrt{2px})^2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p-\sqrt{2px})^2\mathrm{d}x=4\pi p\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi p^3.$$

旋转体的侧面积为

$$S_{侧}=\int_{(l)}2\pi(p+\sqrt{2px})\mathrm{d}s+\int_{(l)}2\pi(p-\sqrt{2px})\mathrm{d}s=4\pi p\int_{(l)}\mathrm{d}s=4\pi p\int_0^p\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\mathrm{d}y$$

$$=4\pi\int_0^p\sqrt{y^2+p^2}\,\mathrm{d}y=4\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Big|_0^p$$

$$=2\pi p^2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})],$$

而底面积为

$$S_{底}=\pi(2p)^2=4\pi p^2,$$

于是,所求的表面积为

$$P=S_{侧}+S_{底}=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})].$$

§9. 矩的计算法. 质心的坐标

1° **矩** 若密度为 $\rho=\rho(y)$ 的质量 M 充满了 Oxy 平面上的某有界连续统 Ω(曲线,平面的区域),而 $\omega=\omega(y)$ 为 Ω 中纵坐标不超过 y 的部分的相应度量(弧长,面积),则数

$$M_k=\lim_{\max|\Delta y_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)=\int_\Omega\rho y^k\mathrm{d}\omega(y)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

称为质量 M 对于 Ox 轴的 k 次矩.

作为特殊情形,当 $k=0$ 时得质量 M,当 $k=1$ 时得静矩,当 $k=2$ 时得转动惯量.

类似地可定义出质量对于坐标平面的矩.

若 $\rho=1$,则相应的矩称为几何矩(线矩,面积矩,体积矩等).

2° **质心** 均质平面图形 S 的质心的坐标 (x_0,y_0) 可由以下公式来定义:

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\qquad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}$,$M_1^{(x)}$ 为图形 S 对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静矩.

【2501】 求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两端点的直径的静矩和转动惯量.

解 取此直径所在的直线作为 Ox 轴,圆心作为原点,则圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 从而,

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\quad 及\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{y}\mathrm{d}x=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x.$$

于是,所求的静矩和转动惯量*分别为

$$M_1=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=2a^2,$$

$$M_2=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^3}{2}.$$

【2502】 求底为 b,高为 h 的均质三角形平板对于其底边的静矩和转动惯量($\rho=1$).

解 取坐标系如图 4.46 所示.

$$M_1^{(x)}=\frac{1}{2}\int_0^b y^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^c y_1^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_c^b y_2^2\mathrm{d}x.$$

---

* 这里假定 $\rho=1$,今后有类似情况,不再说明.

由于 $\quad y_1=y_1(x)=\dfrac{h}{c}x,\qquad y_2=y_2(x)=\dfrac{h}{c-b}(x-b),$

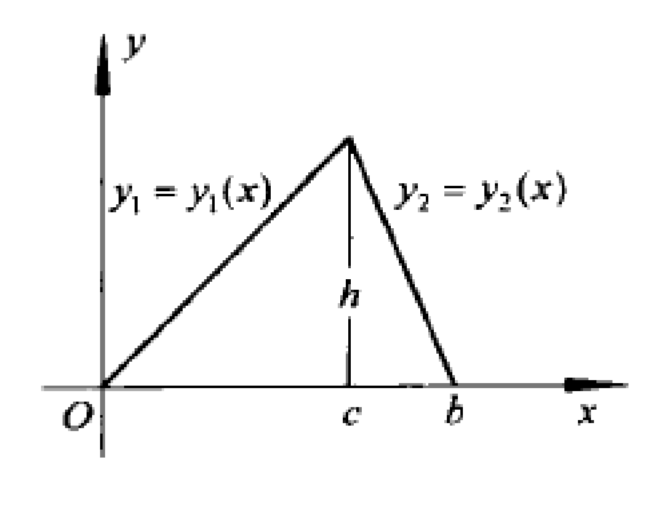


图 4.46

于是,所求的静矩为

$$M_1^{(x)}=\frac{1}{2}\int_0^c \frac{h^2}{c^2}x^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_c^b \frac{h^2}{(c-b)^2}(x-b)^2\,\mathrm{d}x=\frac{bh^2}{6}.$$

又由于 $\quad x_1=x_1(y)=\dfrac{c}{h}y,\qquad x_2=x_2(y)=b+\dfrac{c-b}{h}y,$

于是,所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)}=\int_0^h y^2(x_2-x_1)\,\mathrm{d}y=\int_0^h y^2\left(b-\frac{b}{h}y\right)\mathrm{d}y=\frac{bh^3}{12}.$$

【2503】 求半轴长为 a 和 b 的均质椭圆形平板对其主轴的转动惯量($\rho=1$).

解 不妨设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,则上、下半椭圆方程为

$$x_1=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\quad x_2=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

于是,所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)}=\int_{-b}^b y^2(x_2-x_1)\,\mathrm{d}y=2\int_{-b}^b \frac{a}{b}y^2\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=4ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi^{*)}=\frac{\pi ab^3}{4}.$$

至于 $M_2^{(y)}$,由对称性知,只需在 $M_2^{(x)}$ 的结果中将 a,b 对调即得.所以,

$$M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3 b}{4}.$$

*) 设 $y=b\sin\varphi$.

【2504】 求底半径为 r 和高为 h 的均质圆锥对其底平面的静矩和转动惯量($\rho=1$).

解 取坐标系如图 4.47 所示,则

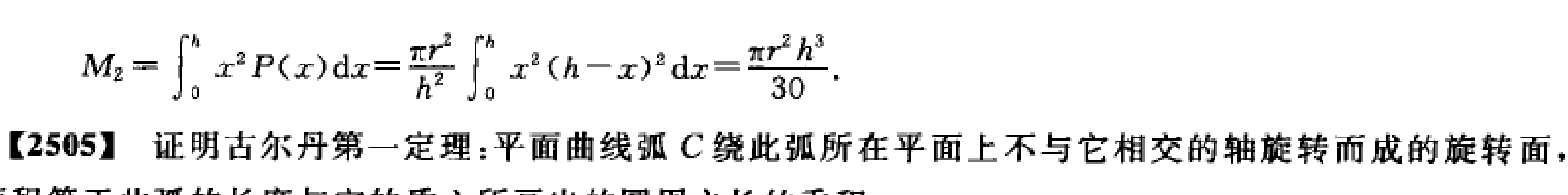
$$M_1=\int_0^h x\,P(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\quad P(x)=\pi y^2=\pi\left[\dfrac{r}{h}(h-x)\right]^2.$

图 4.47

于是,所求的静矩和转动惯量分别为

$$M_1=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2h^2}{12};$$



$$M_2=\int_0^h x^2P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2h^3}{30}.$$

【2505】 证明古尔丹第一定理:平面曲线弧 C 绕此弧所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转面,其面积等于此弧的长度与它的质心所画出的圆周之长的乘积.

证 质心(ξ,η)具有这样的性质,即如把曲线的全部"质量"都集中到它上面,则此质量对于任何一个轴的静矩,都与曲线对此轴的静矩相同.即

$$\xi s=M_y=\int_0^s x\mathrm{d}s,\quad \eta s=M_x=\int_0^s y\mathrm{d}s,$$

式中 s 表示弧长.于是 $\qquad 2\pi\eta s=2\pi\displaystyle\int_0^s y\mathrm{d}s.$

上式右端是弧 C 旋转而成的曲面面积,左端 $2\pi\eta$ 表示弧 C 绕 Ox 轴旋转时其质心所画出的圆周之长.从而,定理得证.

【2506】 证明古尔丹第二定理:平面图形 S 绕此图形所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转体,其体积等于图形 S 的面积与此图形的质心所画出的圆周之长的乘积.

证 由于 $\eta S=M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\mathrm{d}x$，所以，$2\pi\eta S=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x$.

上式右端即为旋转体的体积，从而，定理得证.

【2507】 求圆弧 $x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$（$|\varphi|\leqslant\alpha\leqslant\pi$）的质心的坐标.

解 显见 $\eta=0$，圆弧长 $s=2a\alpha$. 由于

$$M_y=\int_0^s x\mathrm{d}s=\int_{-\alpha}^{\alpha}a^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=2a^2\sin\alpha,$$

所以，

$$\xi=\frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$

于是，所求的质心为 $(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},0)$.

【2508】 求抛物线：$ax=y^2$，$ay=x^2(a>0)$所围图形的质心的坐标.

提示 利用 2506 题及 2397 题的结果，并注意对称性.

解 利用古尔丹第二定理来解此题. 首先，此面积为

$$S=\frac{a^2}{3}{}^{*)},$$

体积为

$$V=\pi\int_0^a\left(ax-\frac{x^4}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是，$2\pi\eta\frac{a^2}{3}=\frac{3\pi a^3}{10}$，$\eta=\frac{9a}{20}$. 利用对称性知 $\xi=\eta=\frac{9a}{20}$.

于是，所求的质心为 $(\frac{9a}{20},\frac{9a}{20})$.

*) 利用 2397 题的结果.

【2509】 求图形 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 的质心的坐标.

解 首先，我们已知第一象限椭圆的面积等于$\frac{\pi ab}{4}$.

其次，我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积. 因为

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

所以，

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

按古尔丹第二定理，我们有 $2\pi\eta\frac{\pi ab}{4}=\frac{2}{3}\pi ab^2$，$\eta=\frac{4b}{3\pi}$. 在结果中间将 a 和 b 对调即得 $\xi=\frac{4a}{3\pi}$.

于是，所求的质心为 $(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi})$.

【2510】 求半径为 a 的均质半球的质心的坐标.

解 取圆心作为原点，则球的方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

设质心为 (ξ,η,ζ)，显见 $\xi=\eta=0$. 而 $V_{半球}=\frac{2\pi a^3}{3}$. 将圆 $y^2+z^2=a^2$ 绕 Oz 轴旋转，即得球. 又

$$M_1^{(z)}=\int_{(V)}z\mathrm{d}V=\pi\int_0^a zy^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^a z(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta=\frac{M_1^{(z)}}{V}=\frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}}=\frac{3a}{8}.$$

于是，所求的质心为 $(0,0,\frac{3a}{8})$.

【2511】 求对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{m\varphi}$ $(m>0)$

上由点 $O(-\infty,0)$到点 $P(\varphi,r)$的弧 OP 的质心 $C(\varphi_0,r_0)$的坐标. 当点 P 移动时，点 C 画出怎样的曲线？

解 质心的直角坐标为

$$\xi=\frac{\int_{(l)}x\mathrm{d}s}{\int_{(l)}\mathrm{d}s}=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi}r\cos\varphi\sqrt{a^2(1+m^2)}\mathrm{e}^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\sqrt{a^2(1+m^2)}\mathrm{e}^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}=\frac{a\int_{-\infty}^{\varphi}\mathrm{e}^{2m\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\mathrm{e}^{2m\varphi}\mathrm{d}\varphi}=\frac{ma\mathrm{e}^{m\varphi}(\sin\varphi+2m\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

同法可得 $$\eta=\frac{\int_{(l)}y\mathrm{d}s}{\int_{(l)}\mathrm{d}s}=\frac{ma\mathrm{e}^{m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

于是,质心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{ma}{4m^2+1}\sqrt{4m^2+1}\mathrm{e}^{m\varphi}=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},\quad \tan\varphi_0=\frac{\eta}{\xi}=\frac{2m\tan\varphi-1}{\tan\varphi+2m}=\frac{\tan\varphi-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\tan\varphi},$$

即 $\varphi_0=\varphi-\alpha$,其中 $\alpha=\arctan\frac{1}{2m}$.

当点 P 移动时,点 $C(\varphi_0,r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}\mathrm{e}^{m\varphi}=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}\mathrm{e}^{m(\varphi_0+\alpha)},$$

这也是一条对数螺线.

【2512】 求曲线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 所围图形的质心的坐标.

解 计算时,将小扇形的重量集中在其质心$(\frac{2}{3}r\cos\varphi,\ \frac{2}{3}r\sin\varphi)$处. 由对称性知 $\eta=0$,而

$$\xi=\frac{\int_{(l)}xy\mathrm{d}x}{\int_{(l)}y\mathrm{d}x}=\frac{\frac{2}{3}\int_0^{\pi}r\cos\varphi\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi}=\frac{2}{3}\frac{\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{2a}{3}\frac{\int_0^{\pi}(1+3\cos\varphi+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi}=\frac{5a}{6}.$$

于是,质心的极坐标为 $\varphi_0=0,\ r_0=\frac{5a}{6}$.

【2513】 求摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的第一拱与 Ox 轴所围图形的质心的坐标.

解 由旋转性知 $\xi=\pi a$. 由于面积 $S=3\pi a^2$*) 及图形 S 绕 Ox 轴旋转而成的曲面包围的体积

$$V_x=5\pi^2a^3\text{**)},$$

利用古尔丹第二定理***),即得质心(ξ,η)适合下列关系式

$$2\pi\eta S=V_x\quad 或\quad \eta=\frac{V_x}{2\pi S}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6}.$$

于是,所求的质心为 $(\pi a,\frac{5a}{6})$.

*) 利用 2413 题的结果.

**) 利用 2480 题(1)的结果.

***) 参看 2506 题.

【2514】 求图形 $0\leqslant x\leqslant a;\ y^2\leqslant 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的质心的坐标.

解 由对称性知 $\eta=0$. 又

$$\xi=\frac{\int_0^a x\pi y^2\mathrm{d}x}{\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^a 2px^2\mathrm{d}x}{\int_0^a 2px\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}a.$$

于是,所求的质心为 $(\frac{2}{3}a,0)$.

【2515】 求半球 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 的质心的坐标.

解 由对称性知 $\xi=\eta=0$.

$$\zeta=\frac{\int_0^a z2\pi x\sqrt{1+x_z'^2}\,dz}{\int_0^a 2\pi x\sqrt{1+x_z'^2}\,dz}^{*)}=\frac{\int_0^a 2\pi z\sqrt{a^2-z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}{\int_0^a 2\pi\sqrt{a^2-z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}=\frac{2\pi a\int_0^a z dz}{2\pi a\int_0^a dz}=\frac{2\pi a\frac{1}{2}a^2}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

于是,所求的质心为 $(0,0,\frac{a}{2})$.

*) 在此是将 $x^2+z^2=a^2$ 绕 Oz 轴旋转而得半球面.

§10. 力学和物理学中的问题

组成适当的积分和并求出其极限,以便求解下列问题:

【2516】 杆的长度 $l=10$m,若该杆的线密度按规律 $\delta=6+0.3x$ kg/m而变,其中 x 为到杆的一个端点的距离,求杆的质量.

解 将杆 n 等分,每份的长 $\Delta x=\frac{10}{n}$,把每小段近似地看成是均质的,并以右端点的密度作为小段的密度.这样,便得到杆的质量 M 的近似值,即 $M\approx\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\frac{10}{n}i\right)\frac{10}{n}$,显然,$n$ 愈大愈近似.

于是,杆的质量为

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\frac{10}{n}i\right)\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[60+\frac{15(n+1)}{n}\right]=75\text{kg}.$$

【2517】 把质量为 m 的物体从地球(其半径为 R)表面抬升到高度为 h 的地方,需要对它作多大的功?若物体远离至无穷远处,则功等于多少?

解 由牛顿万有引力定律

$$f=k\frac{mM}{r^2},$$

其中 M 为地球的质量,r 为物体离开地球中心的距离,k 为比例常数.将 h 分成 n 等份,在每份上把引力近似地看作是不变的,在第 i 份上取

$$r_i=\sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]},$$

则力

$$f_i=k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]},$$

于是,所要作的功为

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{hi}{n}+R\right]}\cdot\frac{h}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}kmMn\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h(i-1)+nR}-\frac{1}{hi+nR}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}kmMn\left[\frac{1}{nR}-\frac{1}{n(R+h)}\right]=\frac{kmMh}{(R+h)R},$$

其中 g 为重力加速度,$k=\frac{gR^2}{M}$ 为引力常数.若物体远离至无穷远处,则功为

$$A_\infty=\lim_{h\to\infty}W=\lim_{h\to\infty}\frac{kmMh}{(R+h)R}=mgR.$$

【2518】 若10N的力能使弹簧伸长1cm,现在要使这弹簧伸长10cm,问需要作多少功?

提示 利用胡克定律

解 由胡克定律知,弹性恢复力 F 与伸长量 x 成正比,即 $F=kx$.由条件知:$k=10$.因而,$F=10x$.

现将 10cm n 等分，每份上恢复力的大小近似地看作是不变的，并取右端点来作和，即得功 W 的近似值为

$$W\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\ \frac{10^2}{n}.$$

显然，n 愈大愈近似. 于是，所要求的功为

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\ \frac{10^2}{n}=\lim_{n\to\infty}500\,\frac{n+1}{n}=500(\text{N}\cdot\text{cm})=5(\text{N}\cdot\text{m})=5\text{J}.$$

【2519】 直径 20cm，长 80cm 的圆柱形汽缸充满压强为 100N/cm^2 的蒸汽. 假定蒸气的温度保持不变，要使其体积减小一半，需要作多少功？

解 由玻意耳—马略特定律有 $pv=C$，其中 p 表示气体的压强，v 表示体积，C 为常量. 由条件知，常量

$$C=10\cdot\pi\cdot 100\cdot 80=8000\pi(\text{N}\cdot\text{m}).$$

设初始时气体体积为 v_0，将区间 $\left[\frac{v_0}{2},v_0\right]$ 分成 n 个小区间，分点依次为

$$\frac{v_0}{2},\ \frac{v_0}{2}q,\ \frac{v_0}{2}q^2,\ \cdots,\ \frac{v_0}{2}q^i,\ \cdots,\ \frac{v_0}{2}q^n=v_0,$$

其中 $q=\sqrt[3]{\dfrac{v_0}{\frac{v_0}{2}}}=\sqrt[3]{2}$. 由于气体体积从 $\frac{v_0}{2}q^{i+1}$ 减小至 $\frac{v_0}{2}q^i$ 需要花费功的近似值为

$$C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right),$$

于是，所要求的功为

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right)=\lim_{n\to\infty}Cn(\sqrt[n]{2}-1)=C\ln 2^{*)}=8000\pi\ln 2\approx 17420\text{J}.$$

*) 利用 541 题的结果.

【2520】 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为半圆形，半径为 a 且其直径位于水的表面上.

解 为求出水对半圆形的压力，只要计算出作用于四分之一圆上的压力，然后再把它两倍起来. 现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形（图 4.48）. 作用于该小扇形上的压力的近似值为

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta\ \frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta=\frac{\pi}{2n}$，$\theta_i=\frac{i\pi}{2n}$. 于是，作用于半圆上的压力为

$$P=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}a^2\ \frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2a^3}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2a^{3\ *)}}{3}.$$

*) 利用 2187 题的结果.

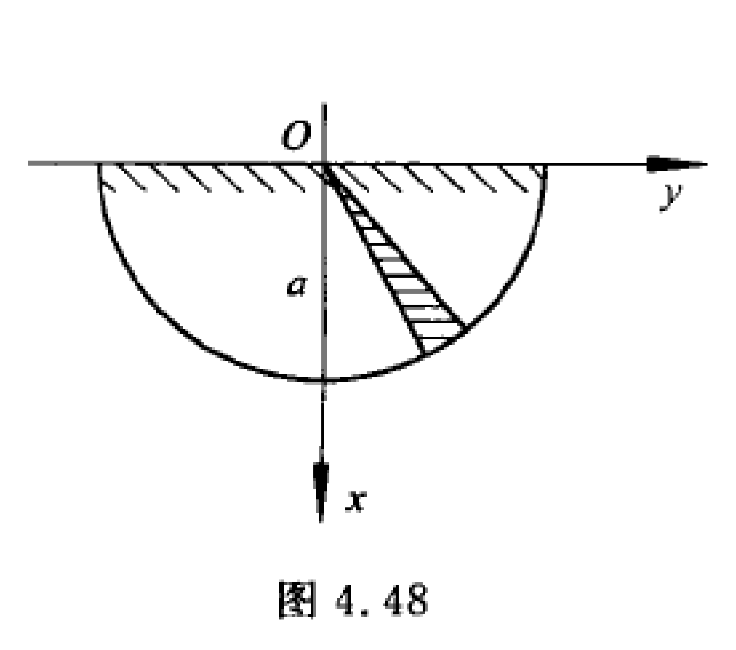


图 4.48

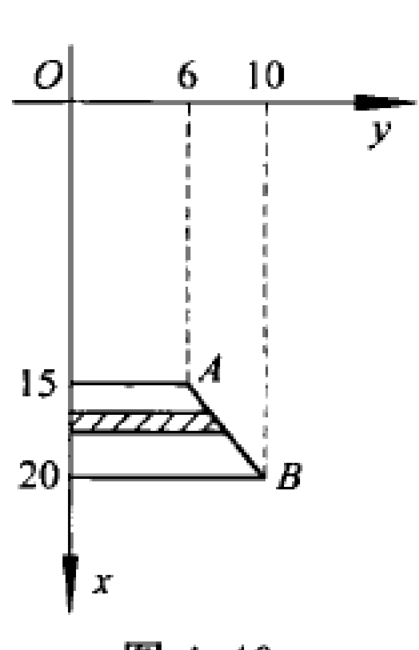


图 4.49

【2521】 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为梯形，其下底 $a=10\text{m}$，上底 $b=6\text{m}$，高 $h=5\text{m}$，下底沉没于水面下的距离为 $c=20\text{m}$.

解 取坐标系如图 4.49 所示. AB 所满足的方程为

$$y=\frac{4}{5}x-6.$$

将区间[15,20]n 等分，每份长 $\Delta x=\frac{5}{n}$. 对应于 Δx 的小条上所受的压力的近似值为

$$\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}.$$

于是，所要求的压力为

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}=708\frac{1}{3}(\mathrm{T})^{*)}$$

*) 仿照 2185 题和 2518 题的作法.

写出微分方程并解下列问题：

【2522】 一质点运动的速度按规律：

$$v=v_0+at\quad(v_0=\text{常数},a=\text{常数})$$

变化，问在闭间隔[0, T]内此质点经过怎样的路程？

解 设路程为 s，则由导数的力学意义知

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=v_0+at,$$

即 $\mathrm{d}t$ 时间内经历的路程为 $\quad \mathrm{d}s=(v_0+at)\mathrm{d}t,$

于是，所经过的路程为 $\quad s=\int_0^T(v_0+at)\mathrm{d}t=v_0T+\frac{1}{2}aT^2.$

【2523】 半径为 R 而密度为 δ 的均质球体以角速度 ω 绕其直径旋转. 求此球的动能.

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$. 不妨设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

则考察以 $\mathrm{d}z$ 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘，其转动惯量为

$$\mathrm{d}J_z=\frac{1}{2}\pi(R^2-z^2)\delta\,(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z.$$

从而，球体的转动惯量为

$$J_z=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z=\frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是，球的动能为 $\quad E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5.$

注 原题误为球壳，现根据答案予以改正.

【2524】 线密度 μ_0 为常数的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点？

解 取坐标系如图 4.50 所示，$|AO|=a$. 设引力在坐标轴上的投影为 F_x 和 F_y. 由于

$$\mathrm{d}F_y=k\frac{m\mu_0\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cos\varphi=-\frac{km\mu_0a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

于是，

$$F_y=-2km\mu_0a\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-2km\mu_0a\left.\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right|_0^{+\infty}=-\frac{2km\mu_0}{a}.$$

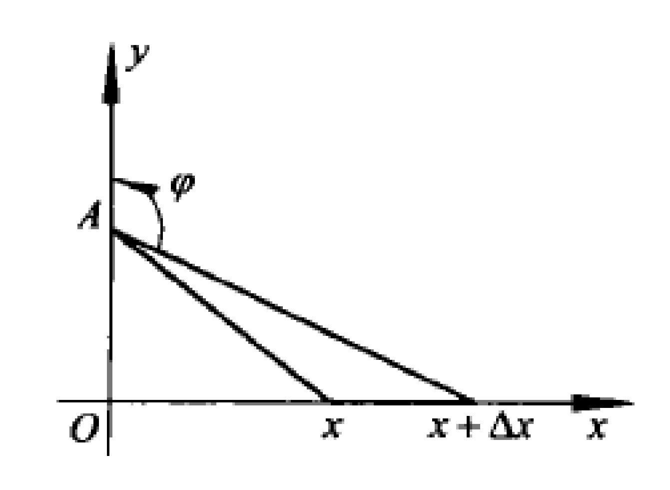


图 4.50

由对称性知，$F_x=0$. 事实上，我们有

$$F_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{km\mu_0\sin\varphi}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=km\mu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=0.$$

其中 k 为引力常数. 由上述分析知，引力指向 y 轴的负向.

【2525】 计算半径为 a 且面密度 δ_0 为常数的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P，此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的直线上，距离 PQ 等于 b.

解 取坐标系如图 4.51 所示. 显然，引力指向 y 轴的正向. 对于以 x 为半径的圆环，其质量为 $\mathrm{d}m=$

$\delta_0 2\pi x \mathrm{d}x$，对质点 P 的引力为

$$\mathrm{d}F_y = 2km\delta_0\pi \frac{\cos\theta}{b^2+x^2}\mathrm{d}x = 2km\delta_0\pi \frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

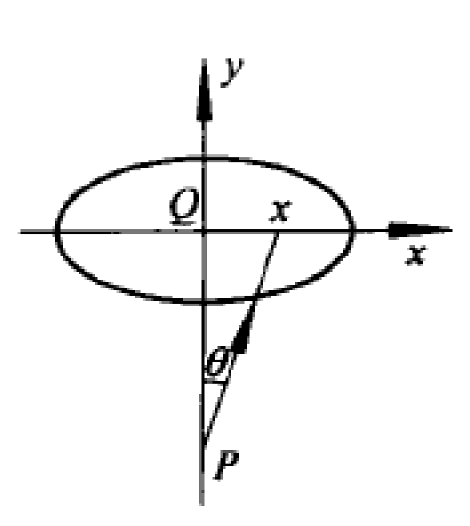


图 4.51

于是，所要求的引力为

$$F_y = 2km\delta_0\pi \int_0^a \frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = 2km\delta_0\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

【2526】 根据托里拆利定律，液体通过小孔从容器中流出的速度等于

$$v = c\sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度，h 为液体表面在小孔以上之高度，$c=0.6$ 为实验系数.

直径为 $D=1\mathrm{m}$ 及高为 $H=2\mathrm{m}$ 的直立圆柱形大桶，其底部有一个直径为 $d=1\mathrm{cm}$ 的圆孔，问此桶充满液体后经过多长时间，方可完全排空？

解 取坐标系如图 4.52 所示. 对于 $\mathrm{d}t$ 时间，从圆孔流出的液体体积

$$\mathrm{d}V = 0.15\pi\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t,$$

而桶内液体体积的减少量为 $\mathrm{d}V = -\pi(50)^2\mathrm{d}x$，其中 x 随时间 t 的增大而减小. 流出的量应等于桶内减少的量，于是，

$$-0.15\pi\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t = \pi(50)^2\mathrm{d}x.$$

积分，得

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{200}^x \frac{2500}{0.15}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}},$$

即

$$t = -33333\frac{1}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}-\sqrt{200}),$$

图 4.52

其中 $g=980\mathrm{cm/s^2}$. 当 $x=0$ 时，t 表示水流完所需的时间. 因而所要求的时间为

$$t = \frac{33333\sqrt{200}}{\sqrt{2\times 980}} = 10648(\mathrm{s}) \approx 3(\mathrm{h}).$$

【2527】 旋转体的容器应当具有什么形状，才能使液体从容器底部流出时，液体表面的下降是均匀的？

解 取坐标系如图 4.53 所示. 不妨设流出孔的半径为单位 cm. 仿上题分析，得

$$\pi x^2\mathrm{d}y = -\pi v\mathrm{d}t = -\pi c\sqrt{2gy}\,\mathrm{d}t,$$

即

$$\mathrm{d}y = -c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2}\mathrm{d}t.$$

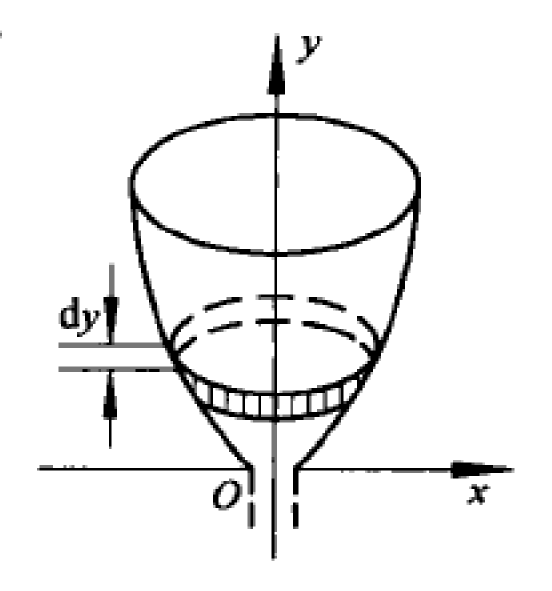


图 4.53

其中 c 为实验系数，g 为重力加速度.

由题意知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2}$ 应等于常数 k，即

$$-c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是 $y = Cx^4$，其中 C 为常数. 所以，容器应当是把曲线 $y=Cx^4$ 绕铅直轴 Oy 旋转而得的曲面所构成的.

【2528】 镭在每一时刻的衰变速度与其现存的量成正比，设镭的量在初始时刻 $t=0$ 有镭 Q_0，经过时间 $T=1600$ 年它的量减少了一半. 求镭的衰变规律.

解 设 Q 为现存的量，按题设有 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = kQ$，其中 k 为比例系数，即 $\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = k\mathrm{d}t$，

两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^{1600} k\mathrm{d}t,$$

从而，

$$k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是，

$$\int_{Q_0}^{Q} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t \mathrm{d}t, \qquad \ln\frac{Q}{Q_0} = \ln 2^{-\frac{t}{1600}}$$

所以，镭的衰变规律为 $Q=Q_0\,2^{-\frac{t}{1600}}$.

【2529】+ 在一种把物质 A 变为物质 B 的二阶化学反应中，反应速度与此二物质浓度之积成正比. 若在 $t=0\text{min}$ 时在容器中有 20% 的物质 B，而当 $t=15\text{min}$ 时其浓度变成 80%. 问在 $t=1\text{h}$ 时其浓度如何？

解 设 x 为生成物 B 的浓度，按题设有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(1-x)$，

其中 k 为比例常数，即
$$\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}=k\mathrm{d}t.$$

两端积分
$$\int_{0.2}^{0.8}\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}=\int_0^{15}k\mathrm{d}t,$$

从而，
$$k=\frac{1}{15}\ln 16.$$

于是，$\displaystyle\int_{0.2}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}=\int_0^t k\mathrm{d}t=\frac{t}{15}\ln 16$，即 $\displaystyle t=\frac{15}{\ln 16}\ln\frac{4x}{1-x}$.

以 $t=60$ 代入上式，得
$$x=\frac{16^4}{16^4+4}=99.99\%\ .$$

所以，经过 $t=1\text{h}$ 在容器中所含有的物质 B 之浓度为 99.99%.

【2530】 根据胡克定律，杆的相对伸长 ε 与相应横断面上的应力 σ 成正比，即
$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E},$$

式中 E 为杨氏模量.

求圆锥形杆在自重作用下的伸长量，此锥形的顶向下而底固定，设底半径等于 R，圆锥的高为 H，密度为 ρ.

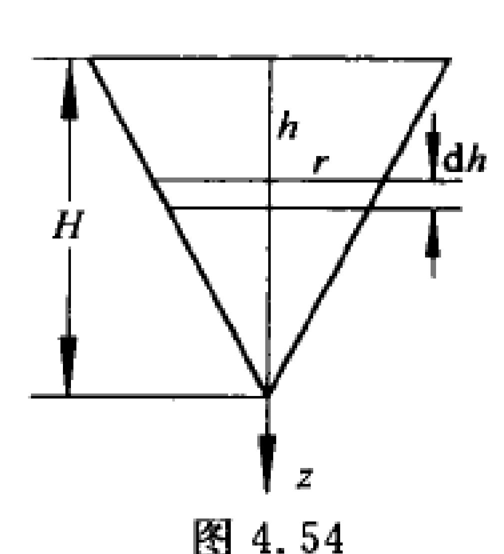


图 4.54


解 取坐标系如图 4.54 所示.

设 $z=h$ 截面处，对于高度为 $\mathrm{d}h$ 的锥体伸长为 $\mathrm{d}l$，则有
$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}h}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)\rho g}{\pi r^2 E}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(H-h)}{E}\rho g,$$

即 $\mathrm{d}l=\dfrac{1}{3}\dfrac{(H-h)}{E}\rho g\,\mathrm{d}h$. 于是，圆锥形杆总的伸长量为
$$l=\int_0^H\frac{1}{3}\cdot\frac{(H-h)\rho g}{E}\mathrm{d}h=\frac{\rho g H^2}{6E}.$$

§11. 定积分的近似计算法

1° **矩形公式** 若函数 $y=y(x)$ 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上连续且充分多次可微，并且 $h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_i=a+ih$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$y_i=y(x_i)$，则 $\displaystyle\int_a^b y(x)\mathrm{d}x=h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n$，

式中
$$R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2° **梯形公式** 在相同的记号下，有
$$\int_a^b y(x)\mathrm{d}x=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

式中
$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi')\quad(a\leqslant\xi'\leqslant b).$$

3° **抛物线公式(辛普森公式)** 命 $n=2k$，得：
$$\int_a^b y(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})]+R_n,$$

式中 $$R_n=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\zeta'') \quad (a\leqslant\zeta''\leqslant b).$$

【2531】 利用矩形公式($n=12$),近似地计算 $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$ 并把结果同精确答案进行比较.

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0$, $y_0=0$; $x_1=\frac{\pi}{6}$, $y_1=\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=0.2618$;

$x_2=\frac{\pi}{3}$, $y_2=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=0.9069$; $x_3=\frac{\pi}{2}$, $y_3=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1.5708$;

$x_4=\frac{2\pi}{3}$, $y_4=\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=1.8138$; $x_5=\frac{5\pi}{6}$, $y_5=\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6}=1.3090$;

$x_6=\pi$, $y_6=\pi\sin\pi=0$; $x_7=\frac{7\pi}{6}$, $y_7=\frac{7\pi}{6}\sin\frac{7\pi}{6}=-1.8326$;

$x_8=\frac{4\pi}{3}$, $y_8=\frac{4\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}=-3.6276$; $x_9=\frac{3\pi}{2}$, $y_9=\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=-4.7124$;

$x_{10}=\frac{5\pi}{3}$, $y_{10}=\frac{5\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3}=-4.5345$; $x_{11}=\frac{11\pi}{6}$, $y_{11}=\frac{11\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{6}=-2.8798$.

按矩形公式,得

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{6}(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}+y_{11})\approx-6.1390.$$

实际上, $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x\approx-6.2832.$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差:

【2532】 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ ($n=8$).

解 $h=\frac{1}{8}=0.125$.

$x_0=0$, $y_0=1$;
$x_8=1$, $y_8=0.5$; $\frac{y_0+y_8}{2}=0.75$,

$x_1=\frac{1}{8}=0.125$, $y_1=0.88889$;

$x_2=0.25$, $y_2=0.8$;

$x_3=0.375$, $y_3=0.72727$;

$x_4=0.5$, $y_4=0.66667$;

$x_5=0.625$, $y_5=0.61538$;

$x_6=0.75$, $y_6=0.57143$;

$x_7=0.875$, $y_7=0.53333$ (+

$\sum_{i=1}^{7} y_i=4.80297.$

按梯形公式,得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\approx h\left(\frac{y_0+y_8}{2}+\sum_{i=1}^{7}y_i\right)=0.125(0.75+4.80297)\approx0.69412,$$

误差为 $$|R_n|=\left|\frac{1}{12\times8^2}\cdot\frac{2}{(1+\xi)^3}\right| \quad (0\leqslant\xi\leqslant1).$$

于是, $$|R_n|\leqslant\frac{2}{12\times8^2}<0.0027=2.7\times10^{-3}$$

实际上, $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln2\approx0.69315.$$

【2533】 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n=12)$.

解 $h=\frac{1}{12}=0.08333$.

$x_0=0,\quad y_0=1;$

$x_{12}=1,\ y_{12}=\frac{1}{2}=0.5;\qquad \frac{y_0+y_{12}}{2}=0.75,$

$x_1=\frac{1}{12},\quad y_1=0.99942;\quad x_2=\frac{1}{6},\quad y_2=0.99539;$

$x_3=\frac{1}{4},\quad y_3=0.98462;\quad x_4=\frac{1}{3},\quad y_4=0.96429;$

$x_5=\frac{5}{12},\quad x_5=0.93254;\quad x_6=\frac{1}{2},\quad y_6=0.88889;$

$x_7=\frac{7}{12},\quad y_7=0.83438;\quad x_8=\frac{2}{3},\quad y_8=0.77143;$

$x_9=\frac{3}{4},\quad y_9=0.70330;\quad x_{10}=\frac{5}{6},\quad y_{10}=0.63343;$

$x_{11}=\frac{11}{12},\quad y_{11}=0.56489\quad (+$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i=9.27258.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\approx h\left(\frac{y_0+y_{12}}{2}+\sum_{i=1}^{11} y_i\right)=0.08333(0.75+9.27258)\approx 0.83518,$$

误差为

$$|R_n|=\left|\frac{1}{12\times 12^2}\cdot\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|\quad (0\leqslant\xi\leqslant 1).$$

利用求极值的方法，估计得 $\left|\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|$ 在$[0,1]$上不超过 2. 于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{2}{12\times 12^2}<0.00116=1.16\times 10^{-3}.$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}=\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\approx 0.83565.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【2534】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx$ $(n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{12}=0.2618,$

$x_0=0,\quad y_0=1;$

$x_6=\frac{\pi}{2},\ y_6=0.8660;\qquad \frac{y_0+y_6}{2}=0.9330,$

$x_1=\frac{\pi}{12},\quad y_1=0.9916;\quad x_2=\frac{\pi}{6},\quad y_2=0.9682;$

$x_3=\frac{\pi}{4},\quad y_3=0.9354;\quad x_4=\frac{\pi}{3},\quad y_4=0.9014;$

$x_5=\frac{5\pi}{12},\quad y_5=0.8756\quad (+$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i=4.6722.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\approx h\left(\frac{y_0+y_6}{2}+\sum_{i=1}^{5}y_i\right)=0.2618(0.9330+4.6722)\approx 1.4674.$$

误差为
$$|R_n|=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12\cdot 6^2}|y''(\xi)|,$$

式中 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$，$0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 及 $y^2=1-\frac{1}{4}\sin^2 x$,依次求导可得 $|y''|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^3}{8\times 12\times 6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<2.59\times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分:

【2535】 $\int_1^9\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \quad (n=4)$.

解 $h=2$.

$x_0=1$, $y_0=1$; $x_1=3$, $y_1=\sqrt{3}=1.732$;

$x_2=5$, $y_2=\sqrt{5}=2.236$; $x_3=7$, $y_3=\sqrt{7}=2.646$;

$x_4=9$, $y_4=3$.

按辛普森公式,得

$$\int_1^9\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]$$
$$=\frac{2}{3}[4+4(1.732+2.646)+2(2.236)]\approx 17.323.$$

实际上, $\int_1^9\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=\frac{52}{3}\approx 17.333.$

【2536】 $\int_0^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x \quad (n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0$, $y_0=2$;

$x_1=\frac{\pi}{6}$, $y_1=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3.866}=1.966$;

$x_2=\frac{\pi}{3}$, $y_2=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3.5}=1.871$;

$x_3=\frac{\pi}{2}$, $y_3=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}=1.732$;

$x_4=\frac{2\pi}{3}$, $y_4=\sqrt{3+\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2.5}=1.581$;

$x_5=\frac{5\pi}{6}$, $y_5=\sqrt{3+\cos\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2.134}=1.461$;

$x_6=\pi$, $y_6=\sqrt{3+\cos\pi}=\sqrt{2}=1.414$.

按辛普森公式,得

$$\int_0^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{18}[(2+1.414)+4(1.966+1.732+1.461)+2(1.871+1.581)]$$
$$\approx 5.4025.$$

【2537】+ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad (n=10)$.

解 $h=\frac{\pi}{20}$.

$x_0=0$, $y_0=1$; $x_1=\frac{\pi}{20}$, $y_1=\frac{20}{\pi}\sin\frac{\pi}{20}=0.99589$;

$x_2=\frac{\pi}{10}$, $y_2=\frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi}{10}=0.98363$; $x_3=\frac{3\pi}{20}$, $y_3=\frac{20}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{20}=0.96340$;

$x_4=\frac{\pi}{5}$, $y_4=\frac{5}{\pi}\sin\frac{\pi}{5}=0.93549$; $x_5=\frac{\pi}{4}$, $y_5=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}=0.90032$;

$x_6=\frac{3\pi}{10}$, $y_6=\frac{10}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{10}=0.85839$; $x_7=\frac{7\pi}{20}$, $y_7=\frac{20}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{20}=0.81033$;

$x_8=\frac{2\pi}{5}$, $y_8=\frac{5}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{5}=0.75683$; $x_9=\frac{9\pi}{20}$, $y_9=\frac{20}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{20}=0.69865$;

$x_{10}=\frac{\pi}{2}$, $y_{10}=\frac{2}{\pi}=0.63662$.

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{\pi}{60}[(1+0.63662)+4(0.99589+0.96340+0.90032+0.81033+0.69865)$$

$$+2(0.98363+0.93549+0.85839+0.75683)]$$

$$\approx1.37076.$$

【2538】$^{+}$ $\int_0^1\frac{x\,dx}{\ln(1+x)}$ $(n=6)$.

解 $h=\frac{1}{6}$.

$x_0=0$, $y_0=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$; $x_1=\frac{1}{6}$, $y_1=1.0812$

$x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=1.1587$; $x_3=\frac{1}{2}$, $y_3=1.2332$;

$x_4=\frac{2}{3}$, $y_4=1.3051$; $x_5=\frac{5}{6}$, $y_5=1.3748$;

$x_6=1$, $y_6=1.4427$.

按辛普森公式，得

$$\int_0^1\frac{x\,dx}{\ln(1+x)}\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{1}{18}[(1+1.4427)+4(1.0812+1.2332+1.3748)+2(1.1587+1.3051)]$$

$$\approx1.2293.$$

【2539】 取 $n=10$，计算卡塔兰常数. $G=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}dx$.

解 $h=\frac{1}{10}$.

$x_0=0$, $y_0=1$; $x_1=0.1$, $y_1=0.99669$;

$x_2=0.2$, $y_2=0.98698$; $x_3=0.3$, $y_3=0.97152$;

$x_4=0.4$, $y_4=0,95127$; $x_5=0.5$, $y_5=0.92730$;

$x_6=0.6$, $y_6=0.90070$; $x_7=0.7$, $y_7=0.87247$;

$x_8=0.8$, $y_8=0.84343$; $x_9=0.9$, $y_9=0.81424$;

$x_{10}=1$, $y_{10}=0.78540$.

按辛普森公式，得

$$G\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{30}(1.78540+18.32888+7.36476)$$
$$\approx 0.91597.$$

【2540】 利用公式$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$计算数$\pi$,精确到$10^{-5}$.

解 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x)=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

现在$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,事实上,它是$y=\arctan x$的导数,因而,

$$f^{(4)}(x)=(\arctan x)^{(5)}.$$

利用第二章1218题的结果得知

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\sin\left(5\arctan\frac{1}{x}\right).$$

在区间[0,1]上,$|f^{(4)}(x)|\leqslant 24$,所以,

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{24}{180n^4}.$$

要误差小于0.00001,只要

$$\frac{24}{180n^4}<\frac{1}{100000},$$

即只要取$n=12$,就有$|R_n|\leqslant 6.5\times 10^{-6}$.

其次,我们还取加进近似于函数值的误差,设法使这个新的误差小于3.5×10^{-6},这样,就能保证总误差小于10^{-5}.为了这个目的,只要计算$\frac{1}{1+x^2}$的值到六位小数精确到0.5×10^{-6}就够了.

现取$n=12$,则有

$x_0=0$, $y_0=1$; $x_1=\frac{1}{12}$, $y_1=0.993103$;

$x_2=\frac{1}{6}$, $y_2=0.972973$; $x_3=\frac{1}{4}$, $y_3=0.941176$;

$x_4=\frac{1}{3}$, $y_4=0.900000$; $x_5=\frac{5}{12}$, $y_5=0.852071$;

$x_6=\frac{1}{2}$, $y_6=0.800000$; $x_7=\frac{7}{12}$, $y_7=0.746114$;

$x_8=\frac{2}{3}$, $y_8=0.692308$; $x_9=\frac{3}{4}$, $y_9=0.640000$;

$x_{10}=\frac{5}{6}$, $y_{10}=0.590164$; $x_{11}=\frac{11}{12}$, $y_{11}=0.543396$;

$x_{12}=1$, $y_{12}=0.500000$.

最后得到

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\approx\frac{1}{36}[(y_0+y_{12})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11})+2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]$$
$$=0.785398,$$

所以,
$$\pi\approx 0.785398\times 4=3.14159,$$
精确到0.00001.

【2541】 计算$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$,精确到0.001.

解 采用辛普森公式计算,则其误差为

$$R_n(x)=-\frac{1}{180n^4}2e^{\xi^2}(8\xi^4+24\xi^2+6)\quad(0<\xi<1),$$

故有 $$|R_n(x)|<\frac{1}{180n^4}\,2e\cdot 38.$$

要 $|R_n(x)|<10^{-3}$，只要 $\frac{2\cdot 38e^1}{180n^4}<10^{-3}$，即只要取 $n=6$.

现取 $n=6$，则有

$x_0=0$，　$y_0=1$　$x_1=\frac{1}{6}$，　$y_1=e^{\frac{1}{36}}=1.0282$；

$x_2=\frac{1}{3}$，　$y_2=e^{\frac{1}{9}}=1.1175$；　$x_3=\frac{1}{2}$，　$y_3=e^{\frac{1}{4}}=1.2840$

$x_4=\frac{2}{3}$，　$y_4=e^{\frac{4}{9}}=1.5596$；　$x_5=\frac{5}{6}$，　$y_5=e^{\frac{25}{36}}=2.0026$；

$x_6=1$，　$y_6=e=2.7183$.

于是，

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx\approx\frac{1}{18}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]\approx 1.463.$$

【2542】 计算 $\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$，精确到 10^{-4}.

解 对于函数 $f(x)=e^x$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上采用泰勒展开式以及相应的拉格朗日余项公式来计算误差：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\Delta_{n+1},$$

其中 $$\Delta_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

于是， $$|\Delta_{n+1}|\leqslant\frac{e}{(n+1)!}x^{n+1},$$

从而，原来的积分数值为

$$I=\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k\ln\frac{1}{x}dx+R_{n+1},$$

其中 $$|R_{n+1}|=\left|\int_0^1 \Delta_{n+1}\ln\frac{1}{x}dx\right|\leqslant\frac{e}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}\ln\frac{1}{x}dx.$$

记 $I_k=\int_0^1 x^k\ln\frac{1}{x}dx\ (k\geqslant 1)$，则有

$$I_k=\frac{1}{k+1}\int_0^1\ln\frac{1}{x}d(x^{k+1})=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln\frac{1}{x}\Big|_0^1+\frac{1}{k+1}\int_0^1 x^k\,dx=\frac{1}{(k+1)^2}.$$

如果取 $n=5$，则有

$$|R_6|\leqslant\frac{e}{6!}I_6=\frac{e}{6!}\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{e}{7\times 7!}=\frac{e}{35280}<\frac{3}{35280}<\frac{1}{1.1\times 10^4}<10^{-4}.$$

记 $I=J+R_6$，则有

$$J=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}I_k=\sum_{k=1}^{5}\left[\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{(k+1)!(k+1)}$$
$$=\frac{1}{2!\cdot 2}+\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{4!\cdot 4}+\frac{1}{5!\cdot 5}+\frac{1}{6!\cdot 6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{96}+\frac{1}{600}+\frac{1}{4320}$$
$$=0.31787^{+}=0.3179+\Delta',$$

其中 $|\Delta'|\leqslant 0.00004=4\times 10^{-5}$，且 $\Delta'<0$.

注意到由 $\Delta_{n+1}>0$ 即可推知 $R_{n+1}>0$. 于是，

$$I=J+R_6=0.3179+(R_6+\Delta')=0.3179+(R_6-|\Delta'|)=0.3179+\Delta,$$

且有 $I\approx 0.3179$，而此时其相应的误差已有

$$|\Delta|=|R_6-|\Delta'||\leqslant\begin{cases}R_6, & 若|\Delta'|\leqslant R_6,\\ |\Delta'|, & 若|\Delta'|>R_6\end{cases}\leqslant\max(R_6,|\Delta'|)<10^{-4}.$$

注 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值，因为被积函数$(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$的四阶导数在$x=0$的右近旁是无界的，从而不能估计出误差. 所以，上面我们用泰勒公式来作近似计算. 这样，计算以及估计误差都较为简单. 当然，也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值，这时需要或者改变被积函数或者把积分区域分成两个. 例如，我们可以改变被积函数如下：令

$$I=\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx=-\int_0^1(e^x-1)\ln x dx,$$

设 $f(x)=(e^x-1)\ln x$，若补充定义 $\quad f(0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0,$

则 $f(x)$是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数. 由于

$$f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x-1}{x}=f(x)+\frac{e^x-1}{x}+\ln x\quad(0<x\leqslant 1),$$

故
$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx+\int_0^1\ln x dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=0,\quad \int_0^1\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

得
$$I=\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx-1.$$

于是，我们把求$\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$的近似值问题，归结为求$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx$的近似值问题. 令$g(x)=\frac{e^x-1}{x}$，并补充定义

$$g(0)=\lim_{x\to+0}g(x)=1,$$

则 $g(x)$是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数. 由求高阶导数的莱布尼茨法则，易得

$$g^{(n)}(x)=\frac{e^xP_n(x)-(-1)^n n!}{x^{n+1}}\quad(0<x\leqslant 1),$$

其中
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k k!x^{n-k}\quad(n=1,2,\cdots).$$

下面证明 $g^{(n)}(0)$存在并且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 首先，由洛必达法则，我们有

$$\lim_{x\to+0}g^{(n)}(x)=\lim_{x\to+0}\frac{e^xP_n(x)-(-1)^n n!}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+0}\frac{e^x[P_n(x)+P_n'(x)]}{(n+1)x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{e^x x^n}{(n+1)x^n}=\frac{1}{n+1}$$
$$(n=1,2,\cdots).$$

于是，根据中值定理，得

$$g'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\xi\to+0}g'(\xi)=\frac{1}{2}\quad(0<\xi<x).$$

今假定 $g^{(n)}(0)$存在且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$. 于是，

$$g^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}g^{n+1}(\eta)=\frac{1}{n+2}\quad(0<\eta<x).$$

根据数学归纳法，知 $g^{(n)}(0)$存在且 $\quad g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$

由此又知 $g^{(n)}(x)$是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数$(n=1,2,\cdots)$. 令 $h(x)=e^xP_n(x)-(-1)^n n!$. 由于

$$h'(x)=e^x[P_n(x)+P_n'(x)]=e^x x^n>0\quad(0<x\leqslant 1),$$

故 $h(x)$在$[0,1]$上是递增的，从而，

$$h(x)>h(0)=0\quad(0<x\leqslant 1).$$

因此，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$g^{(n)}(x)>0$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $g^{(n-1)}(x)$是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的严格增函数$(n=1,2,\cdots)$. 特别地，$g^{(4)}(x)$当然是$0\leqslant x\leqslant 1$上的严格增函数. 于是，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$\frac{1}{5}=g^{(4)}(0)\leqslant g^{(4)}(x)\leqslant g^{(4)}(1).$$

由于当 $0<x\leqslant 1$ 时，

$$g^{(4)}(x)=\frac{e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)-24}{x^5},$$

故 $g^{(4)}(1)=9e-24<0.5$. 因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$0.2\leqslant g^{(4)}(x)\leqslant 0.5.$$

代入辛普森公式的误差表达式，得

$$|R_n(x)|=\left|-\frac{g^{(4)}(\xi'')}{180n^4}\right|\leqslant\frac{1}{360n^4},\quad R_n(x)<0.$$

取 $n=4$，有
$$|R_4(x)|\leqslant\frac{1}{360n^4}<1.1\times 10^{-5}.$$

计算得

$$g(0)=1,\ g\left(\frac{1}{4}\right)=1.13610,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=1.29744,\ g\left(\frac{3}{4}\right)=1.48933,\ g(1)=1.71828.$$

于是，代入后最终得

$$I=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x-1\approx\frac{1}{12}\left\{g(0)+g(1)+2g\left(\frac{1}{2}\right)+4\left[g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}-1=1.3179-1=0.3179,$$

其误差的绝对值显然小于 $0.0001=10^{-4}$.

也可不改变被积函数，而把积分区间分成两个，步骤如下：

令 $u=\frac{1-x}{x}$ $(0<x<1)$，则 $\frac{1}{x}=1+u$ $(u>0)$. 于是，当$0<x<1$ 时，有

$$0<(e^x-1)\ln\frac{1}{x}=(e^x-1)\ln(1+u)<(e^x-1)u=\frac{1-x}{x}(e^x-1)<\frac{e^x-1}{x}.$$

前面已证函数 $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是严格增大的(注意，规定 $g(0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=1$)，故当 $0<x<1$ 时，有

$$1<\frac{e^x-1}{x}<g(1)=e-1<2;$$

从而，

$$0<\int_0^{10^{-5}}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_0^{10^{-5}}\frac{e^x-1}{x}\mathrm{d}x<2\int_0^{10^{-5}}\mathrm{d}x=0.2\times 10^{-4}.$$

求出函数$(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$的四阶导数的表达式后，易知它在闭区间 $10^{-5}\leqslant x\leqslant 1$ 上是连续的，从而是有界的，并且不难估计出其绝对值的上界. 因此，可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

的近似值，使误差的绝对值小于 0.8×10^{-4}. 显然，若以此作为积分 $\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，则其误差的绝对值小于 10^{-4}. 由于计算较繁，从略.

【2543】 近似地计算概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 作变换 $x=\frac{t}{1-t}$，则积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$.

由于题中对精确度未提出明确要求，故 n 可任取. 例如，取 $n=2k=18$，$\Delta t=\frac{1}{18}$，则有

$t_0=0$，　$y_0=1$；　$t_1=\frac{1}{18}$，　$4y_1=4.46894$；

$t_2=\frac{1}{9}$，　$2y_2=2.49201$；　$t_3=\frac{1}{6}$，　$4y_3=5.53415$；

$t_4=\frac{2}{9}$，　$2y_4=3.04696$；　$t_5=\frac{5}{18}$，　$4y_5=6.61414$

$t_6=\frac{1}{3}$，　$2y_6=3.50460$；　$t_7=\frac{7}{18}$，　$4y_7=7.14411$；

$t_8=\frac{4}{9}$，　$2y_8=3.41685$；　$t_9=\frac{1}{2}$，　$4y_9=5.88607$；

$t_{10}=\frac{5}{9}$，　$2y_{10}=2.12232$；　$t_{11}=\frac{11}{18}$，　$4y_{11}=2.23855$；

$t_{12}=\frac{2}{3}$，　$2y_{12}=0.32968$；　$t_{13}=\frac{13}{18}$，　$4y_{13}=0.06009$；

$t_{14}=\frac{7}{9}$，　$2y_{14}=0.00010$；　$t_{15}=\frac{5}{6}$，　$4y_{15}=0$；

$t_{16}=\frac{8}{9}$，　$2y_{16}=0$；　$t_{17}=\frac{17}{18}$，　$4y_{17}=0$；

$t_{18}=1$，　$y_{18}=\lim\limits_{t\to 1}e^{-\left(\frac{1}{1-t}\right)^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^2=0.$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$\approx\frac{1}{54}(1+4.46894+2.49201+5.53415+3.04696+6.61414+3.50460+7.14411+$$
$$3.41685+5.88607+2.12232+2.23855+0.32968+0.06009+0.00010)$$
$$=\frac{47.85857}{54}\approx 0.88627.$$

【2544】 近似地求出半轴为 $a=10$ 及 $b=6$ 的椭圆的周长.

解　设椭圆的参数方程为

$$x=10\cos t,\quad y=6\sin t.$$

于是有
$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=10\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt,$$

从而得椭圆的周长为
$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

现取 $n=2k=6$ 近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

注意到 $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$，$\sin^2\frac{5\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$，$h=\frac{\pi}{12}$，即有

$t_0=0$，　$y_0=1$；

$t_1=\frac{\pi}{12}$，　$4y_1=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})}=3.913$；

$t_2=\frac{\pi}{6}$，　$2y_2=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}}=1.833$；

$t_3=\frac{\pi}{4}$，　$4y_3=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}}=3.293$；

$t_4=\frac{\pi}{3}$，　$2y_4=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{3}{4}}=1.442$；

$t_5=\frac{5\pi}{12}$，　$4y_5=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})}=2.539$；

$t_6=\frac{\pi}{2}$，　$y_6=4\sqrt{1-\frac{16}{25}}=0.6.$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{\pi}{36}(1+0.6+3.913+3.293+2.539+1.833+1.442)$$

$$\approx 1.276,$$

所以，椭圆周长的近似值为 $s=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\ dt\approx 40\times 1.276=51.04.$

【2545】 取 $\Delta x=\frac{\pi}{3}$，描点作出函数 $y=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的图像.

解 取 $n=2k=6$ 计算函数 $y=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 的值. 先计算 $y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt$. 由于 $h=\frac{\pi}{18}$，且

$t_0=0$，　$y_0=1$；　$t_1=\frac{\pi}{18}$，　$4y_1=3.980$；　$t_2=\frac{\pi}{9}$，　$2y_2=1.960$；

$t_3=\frac{\pi}{6}$，　$4y_3=3.820$；　$t_4=\frac{2\pi}{9}$，　$2y_4=1.841$；　$t_5=\frac{5\pi}{18}$，　$4y_5=3.511$；

$t_6=\frac{\pi}{3}$，　$y_6=0.827$.

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\approx\frac{\pi}{54}(1+0.827+3.980+3.820+3.511+1.960+1.841)\approx 0.99.$$

再计算 $y=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt$. 由于 $h=\frac{\pi}{9}$，且

$t_0=0$，　$y_0=1$；　$t_1=\frac{\pi}{9}$，　$4y_1=3.919$；　$t_2=\frac{2\pi}{9}$，　$2y_2=1.841$；

$t_3=\frac{\pi}{3}$，　$4y_3=3.308$；　$t_4=\frac{4\pi}{9}$，　$2y_4=1.411$；　$t_5=\frac{5\pi}{9}$，　$4y_5=2.257$；

$t_6=\frac{2\pi}{3}$，　$y_6=0.413$.

所以，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\approx\frac{\pi}{27}(1+0.413+3.919+3.308+2.257+1.841+1.411)\approx 1.65.$$

选取适当的 n，类似地可求得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\approx 1.85,\quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\approx 1.72,\quad \int_0^{\frac{5\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\approx 1.52,\quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{t}dt\approx 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

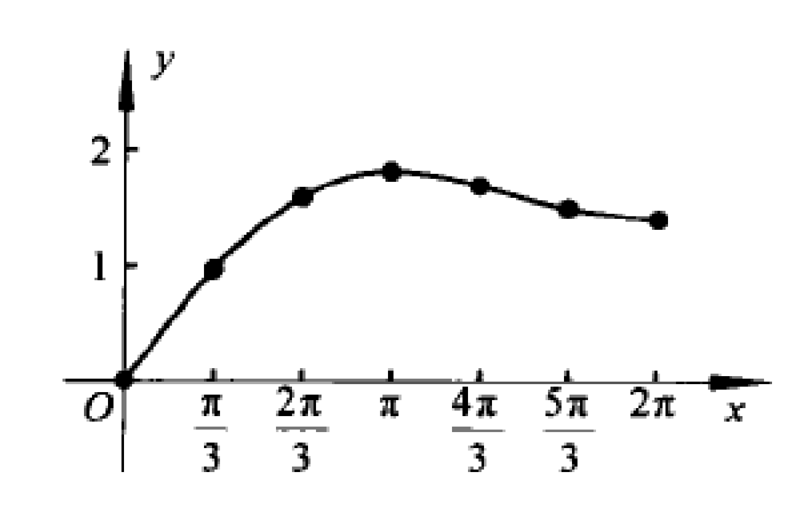


图 4.55